

INDUZIONE

il principio di induzione è una importante proprietà valida esclusivamente nell'insieme dei numeri naturali (estensibile anche all'insieme dei numeri interi).

Esso indica che:

- se \mathcal{P} è una proprietà vera nel caso $n=1$, (eventualmente per $n=0, 1, 2, \dots$ in particolare per i primi pochi casi che si possono verificare)
- se \mathcal{P} viene pensata come vera per il caso $n-1$
- se si riesce a dimostrare partendo dal caso $n-1$ la validità del caso n
- \implies allora la proprietà \mathcal{P} può essere ritenuta vera per ogni numero naturale

Esercizio 1

determinare una formula che permette di sintetizzare la somma \mathcal{S}_n dei primi n numeri naturali

$$\mathcal{S}_n = 1+2+3+4+ \dots + (n-1) + n$$

$$\mathcal{S}_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

verifichiamo con il principio di induzione la validità della formula:

- è vera nel caso $n=2$, infatti $\mathcal{S}_2 = 1+2 = \frac{2(2+1)}{2} = 3$
- è vera nel caso $n=3$, infatti $\mathcal{S}_3 = 1+2+3 = \frac{3(3+1)}{2} = 6$
- è vera nel caso $n=4$, infatti $\mathcal{S}_4 = 1+2+3+4 = \frac{4(4+1)}{2} = 10$
- supponiamo che la formula sia vera per il calcolo della somma dei primi $n-1$ numeri interi, cioè $\mathcal{S}_{n-1} = 1+2+3+4+\dots+(n-2)+(n-1) = \frac{(n-1)((n-1)+1)}{2} = \frac{(n-1)n}{2}$
- vediamo se si riesce a dimostrare la formula generale per il caso n :
$$\mathcal{S}_n = \mathcal{S}_{n-1} + n = \dots = n + \frac{(n-1)((n-1)+1)}{2} = n + \frac{(n-1)n}{2} = \frac{2n+(n-1)n}{2} = \frac{2n+n^2-n}{2} = \frac{n^2+n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$
- abbiamo verificato a partire dalla veridicità della formula per il caso $n-1$ che la formula è vera anche per il caso n , quindi la formula si può ritenere vera per la somma dei primi n numeri naturali, qualsiasi sia il valore attribuito alla lettera n .

Esercizio 2

determinare una formula che permette di sintetizzare la somma \mathcal{R}_n dei quadrati dei primi n numeri naturali

$$\mathcal{R}_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2$$

$$\mathcal{R}_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

verifichiamo con il principio di induzione la validità della formula:

– è vera nel caso $n=2$, infatti $\mathcal{R}_2 = 1^2 + 2^2 = 1 + 4 = \frac{2(2+1)(2 \cdot 2 + 1)}{6} = 5$

– è vera nel caso $n=3$, infatti $\mathcal{R}_3 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 1 + 4 + 9 = \frac{3(3+1)(2 \cdot 3 + 1)}{6} = 14$

– è vera nel caso $n=4$, infatti $\mathcal{R}_4 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 1 + 4 + 9 + 16 = \frac{4(4+1)(2 \cdot 4 + 1)}{6} = 30$

– supponiamo che la formula sia vera per il calcolo della somma dei quadrati dei primi $n-1$ numeri interi, cioè

$$\mathcal{R}_{n-1} = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-2)^2 + (n-1)^2 = \frac{(n-1)((n-1)+1)(2 \cdot (n-1)+1)}{6} = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

– vediamo se si riesce a dimostrare la formula generale per il caso n :

$$\mathcal{R}_n = \mathcal{R}_{n-1} + n^2 = n^2 + \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = \frac{6n^2 + (n-1)n(2n-1)}{6} = \dots$$

$$\dots = \frac{n(6n + (n-1)(2n-1))}{6} = \frac{n(6n + 2n^2 - 3n + 1)}{6} = \frac{n(2n^2 + 3n + 1)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

– abbiamo verificato a partire dalla veridicità della formula per il caso $n-1$ che la formula è vera anche per il caso n , quindi la formula si può ritenere vera per la somma dei quadrati dei primi n numeri naturali, qualsiasi sia il valore attribuito alla lettera n .