Introduzione alla
TEORIA DEI GRAFI

La teoria dei grafi è una parte importante della **Ricerca Operativa (R.O.)**.

Come per gli altri problemi affrontati nella R.O. ***Si tratta di risolvere*** problemi di minimo (o di massimo) sotto opportune restrizioni poste dal problema preso in esame e riguardanti aspetti economici o ingegneristici.

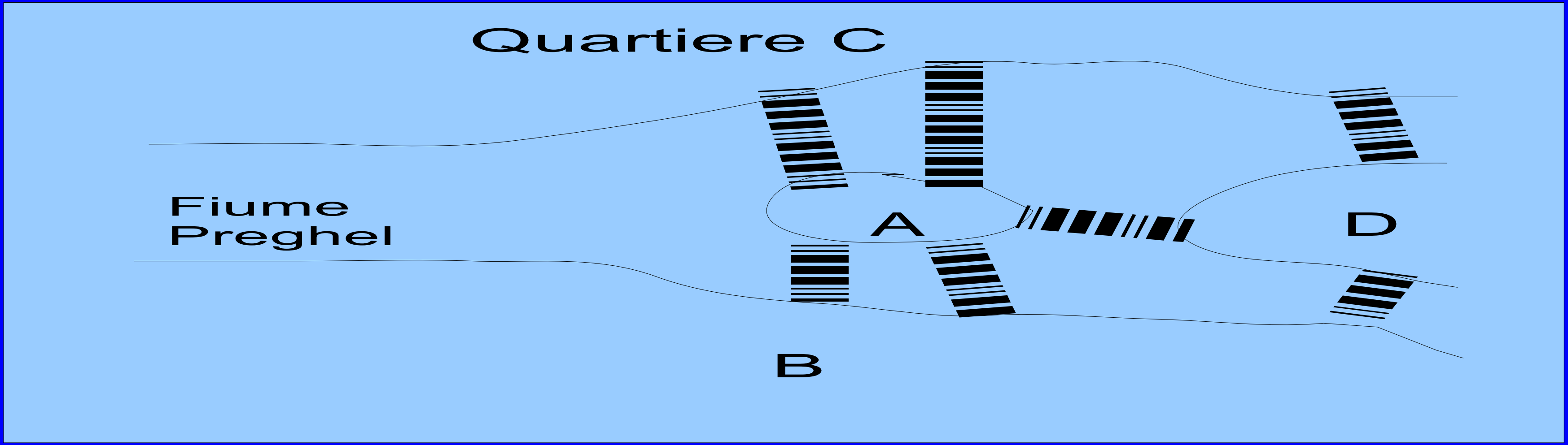
Introduzione alla
TEORIA DEI GRAFI

La Teoria dei Grafi si occupa di problemi che possono essere visualizzati mediante grafici in cui compaiono punti (detti nodi), linee che congiungono tali punti (archi); tali problemi sono poi riconducibili ad una formulazione matematica simile a quella della programmazione lineare, cioè esprimibile mediante equazioni e disequazioni lineari (di primo grado).

Introduzione alla
TEORIA DEI GRAFI

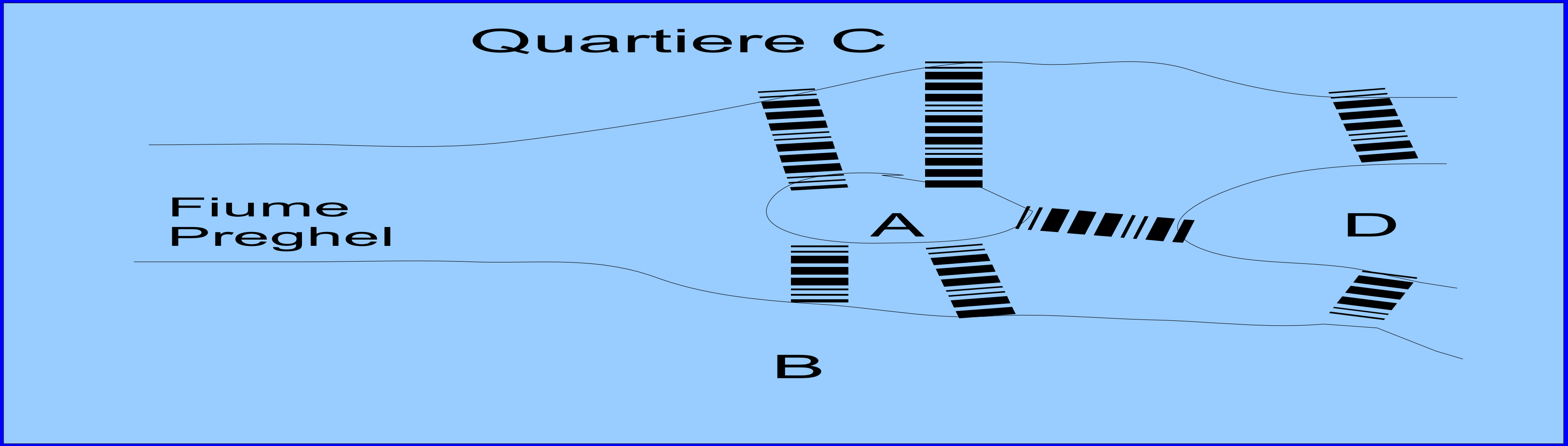
La Teoria dei Grafi è l'insieme di definizioni, teoremi e metodi risolutivi (algoritmi anche implementabili su computer) che permettono di capire per esempio quale sia il percorso minimo tra due punti, il percorso più conveniente per passare attraverso tutte le strade di una città o viceversa il percorso più conveniente per raggiungere tutti gli incroci delle strade della stessa città.

Problema di Eulero per la passeggiata attraverso i ponti di Köenisberg



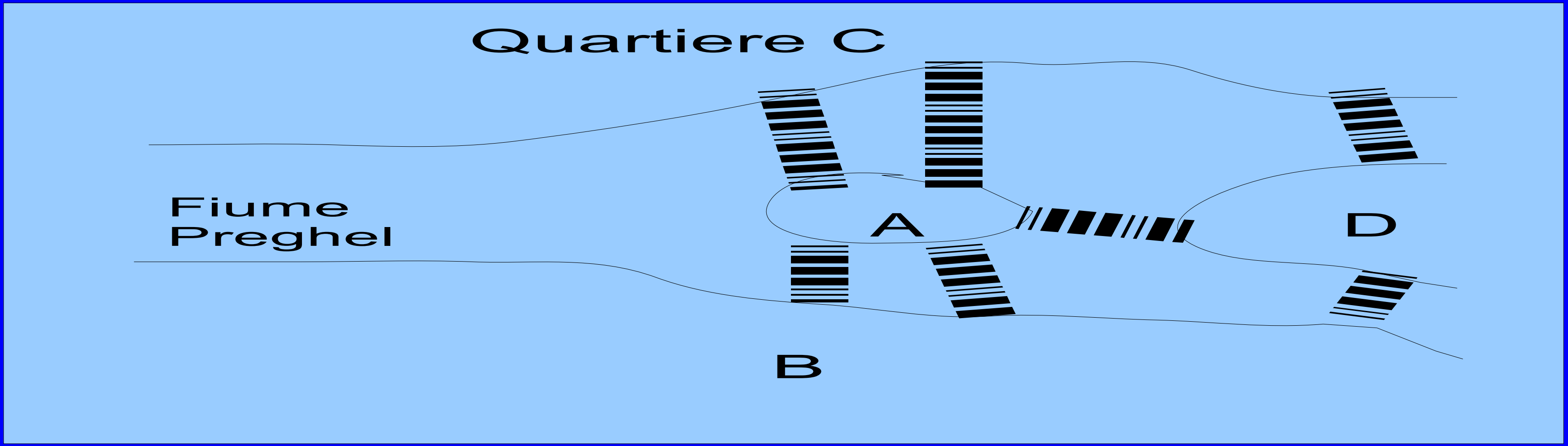
Köenisberg (oggi Kaliningrad) è una città della Prussia Orientale, attraversata dal fiume Preghel che in città si biforca in due rami dividendo la città in quattro quartieri A, B, C, D congiunti da sette ponti come in figura.

Problema di Eulero per la passeggiata attraverso i ponti di Köenisberg



Fra gli abitanti della città era sorto il problema se fosse possibile effettuare un passeggiata che, partendo da uno qualsiasi dei quattro quartieri, vi facesse ritorno, passando una ed una sola volta per ciascun ponte.

Problema di Eulero per la passeggiata attraverso i ponti di Köenisberg



La risposta, **negativa**, fu data da Eulero (a 31 anni). Egli schematizzò il problema identificando i quartieri con nodi di un grafo e i ponti con gli archi

Problema della pecora, del lupo e del cavolo

Lupo (indicato con L), pecora (indicata con P) e cavolo (indicato con C) si trovano sulla riva di un fiume e devono essere portati sull'altra riva da un barcaiolo (indicato con B) mediante una barca tanto piccola da poter portare oltre al barcaiolo solo il lupo o solo la pecora o solo il cavolo. Inoltre il barcaiolo non può lasciare senza sorveglianza il lupo in compagnia della pecora o la pecora in compagnia del cavolo.

Modelli di Ottimizzazione su rete

- **Cammino minimo**

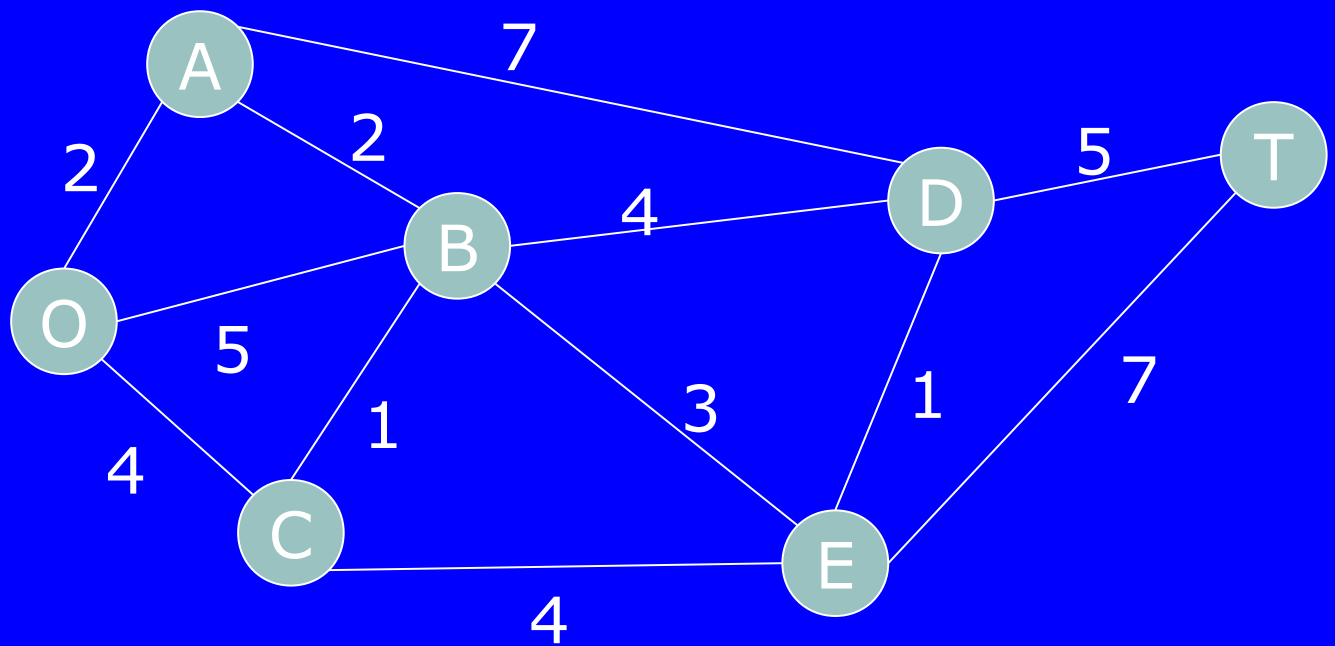
- Minimo albero ricoprente
- Flusso di costo minimo
- Flusso massimo
- Pianificazione di progetti

Cammino minimo

- Minimizzazione della distanza percorsa
- Minimizzazione del costo totale di una sequenza di attività
- Minimizzazione del tempo totale per svolgere una sequenza di attività

- Cammino minimo da origine a destinazione(oggi)
- Cammino minimo da origine a qualunque altro nodo (prof. Malesani)
- Cammino minimo da ogni nodo a qualunque altro nodo.

Cammino minimo a Seervada Park



Cammino minimo a Seervada Park

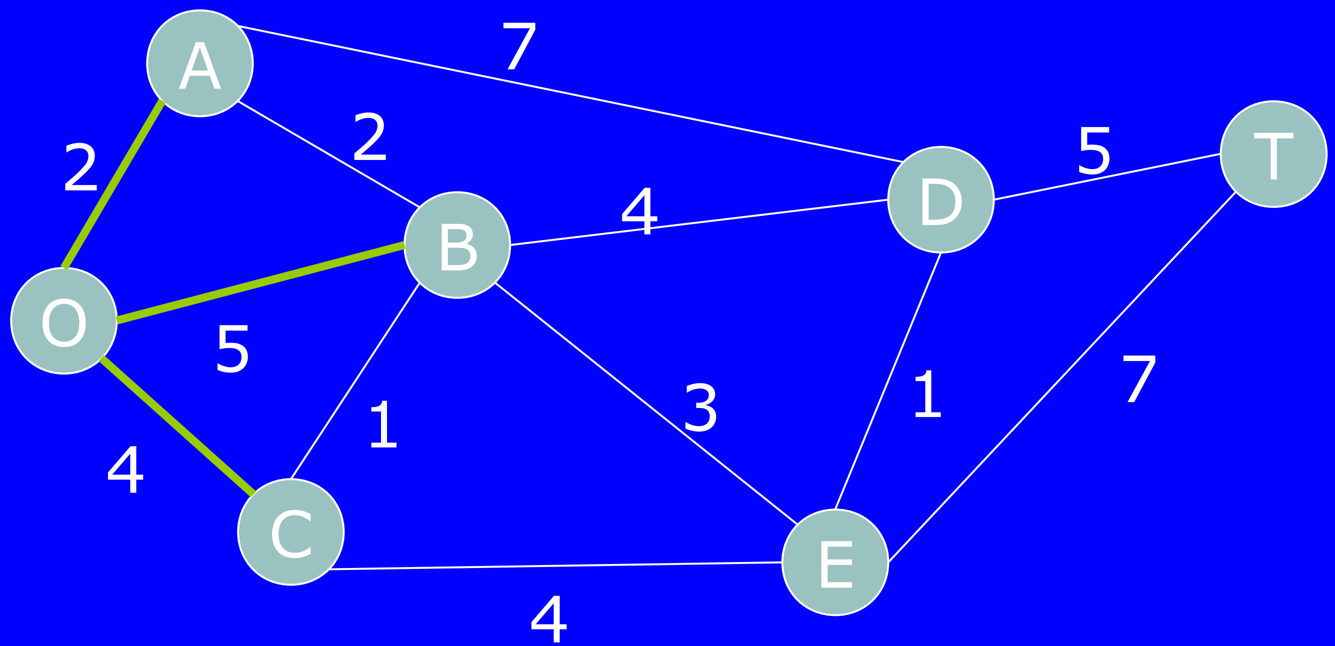
- L'accesso al parco è riservato a un numero limitato di visite turistiche e passeggiate
- Le macchine non sono ammesse nel parco e sulle strade, strette e piene di curve, possono circolare bus dall'entrata del parco O fino a T torre panoramica, le altre lettere indicano postazione di guardiani, incroci, servizi
- I numeri sopra gli archi indicano le lunghezze, in miglia, delle strade.

Cammino minimo a Seervada Park

TRE PROBLEMI

- Quale tra i cammini che vanno dall'entrata O alla postazione T , ha distanza minima
- Devono installare delle linee telefoniche sotto le strade che colleghino tutte le stazioni del parco (nodi del grafo)
- Far circolare vari bus all'interno del parco in modo che , in alta stagione, ci sia il massimo delle corse bus, anche utilizzando percorsi diversi

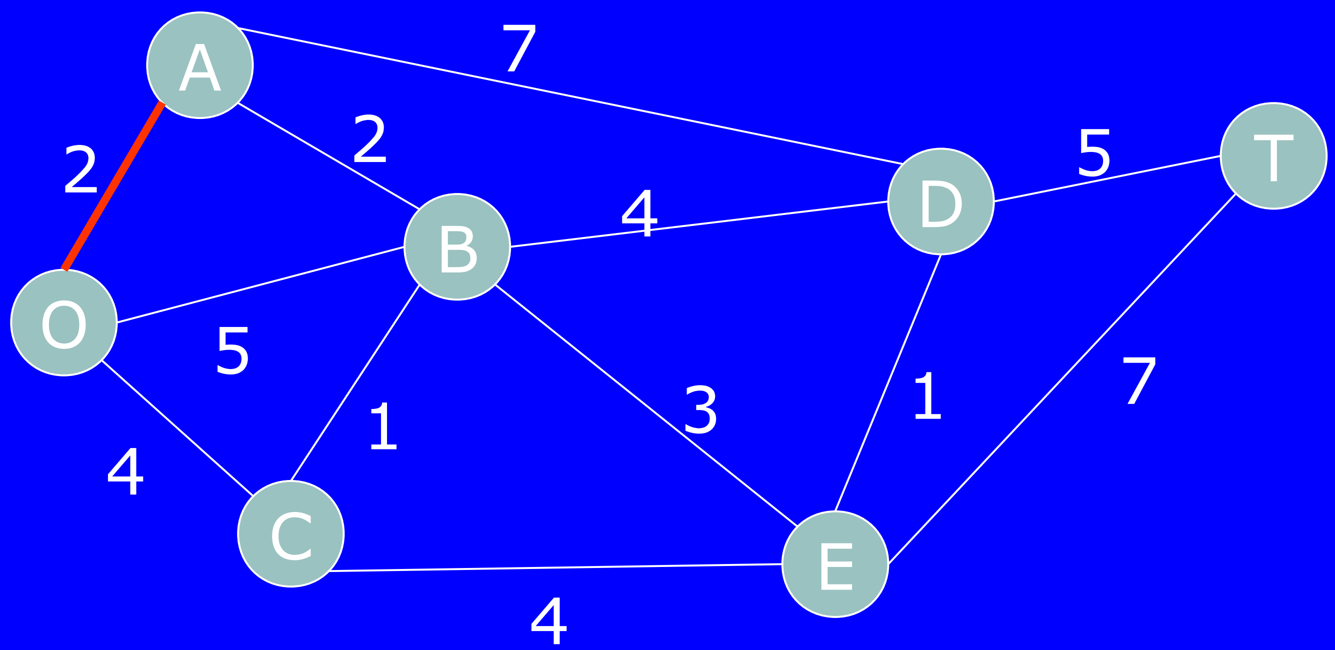
Algoritmo per Cammino minimo



Nodi scelti connessi *	Nodi candidati	Distanza tot (da O)	K-esimo nodo vicino	Distanza minima	Ultimo arco

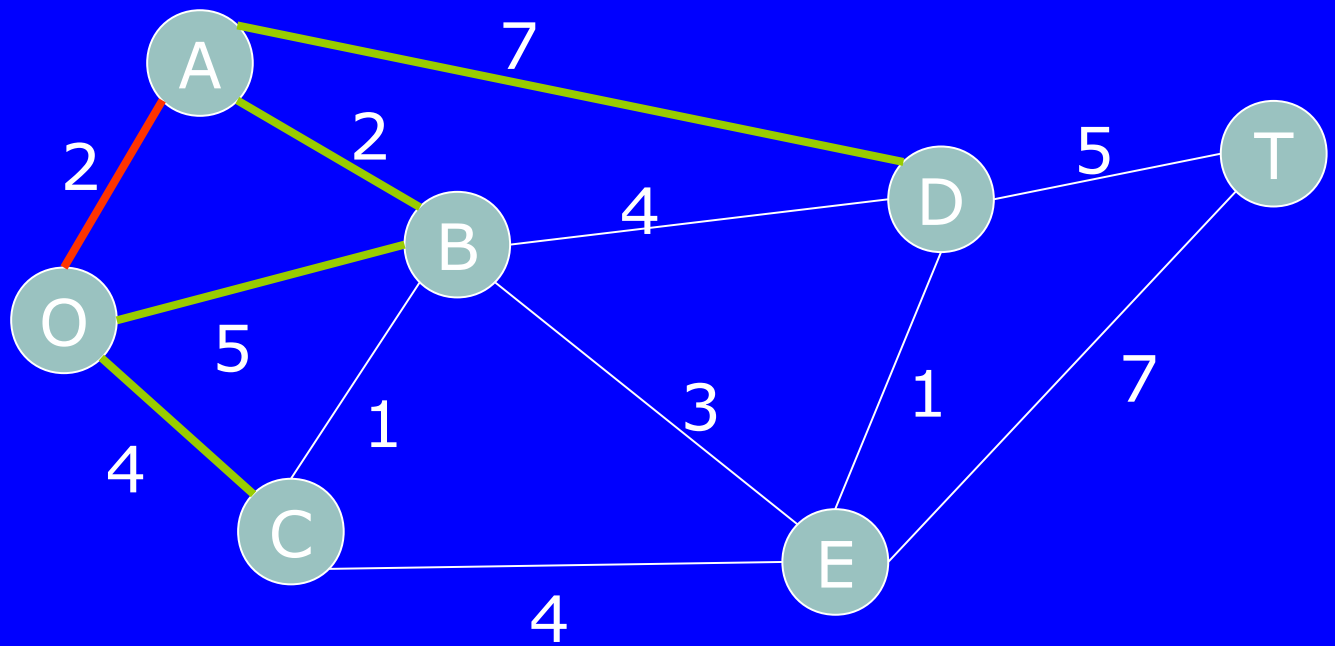
* nodi scelti, direttamente connessi (legati da arco) ai nodi non ancora scelti

Algoritmo per Cammino minimo



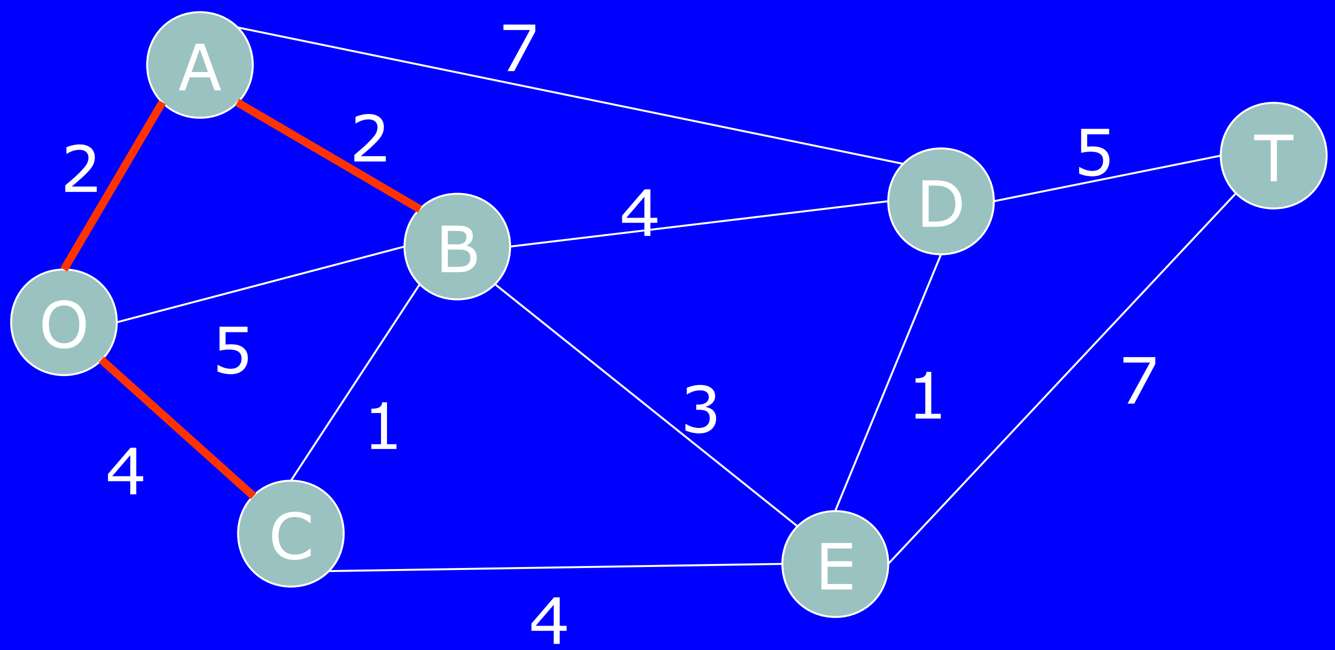
Nodi scelti connessi	Nodi candidati	Distanza tot (da O)	K-esimo nodo vicino	Distanza minima	Ultimo arco
O	A	2	A	2	OA

Algoritmo per Cammino minimo



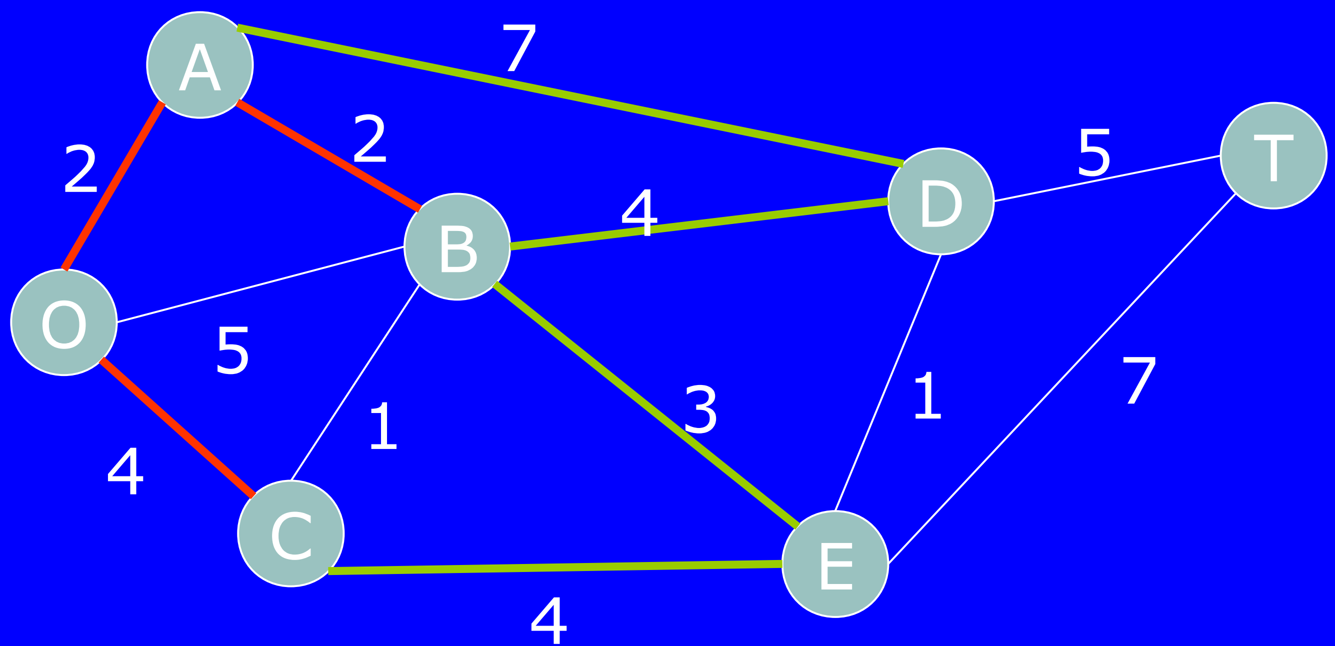
Nodi scelti connessi	Nodi candidati	Distanza tot (da O)	K-esimo nodo vicino	Distanza minima	Ultimo arco
O,A	C,B,D				OA

Algoritmo per Cammino minimo



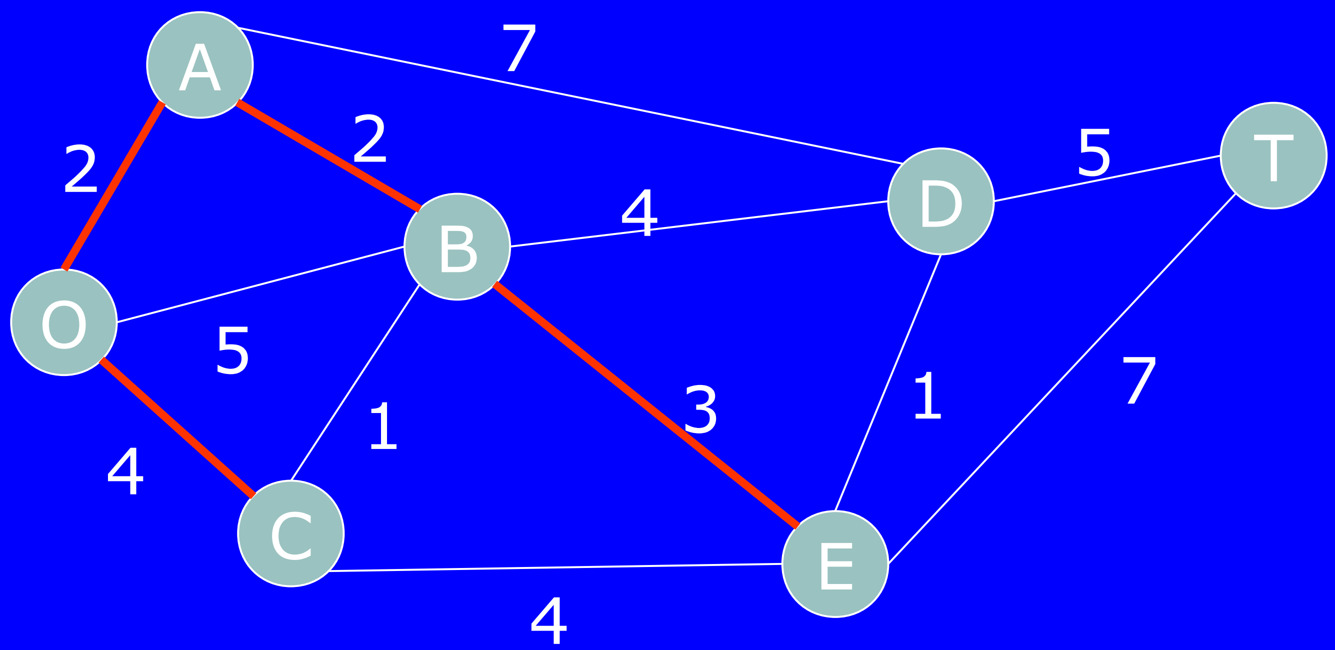
Nodi scelti connessi	Nodi candidati	Distanza tot (da O)	K-esimo nodo vicino	Distanza minima	Ultimo arco
O,A	C	4	C	4	OC
	B	2+2	B	4	AB

Algoritmo per Cammino minimo



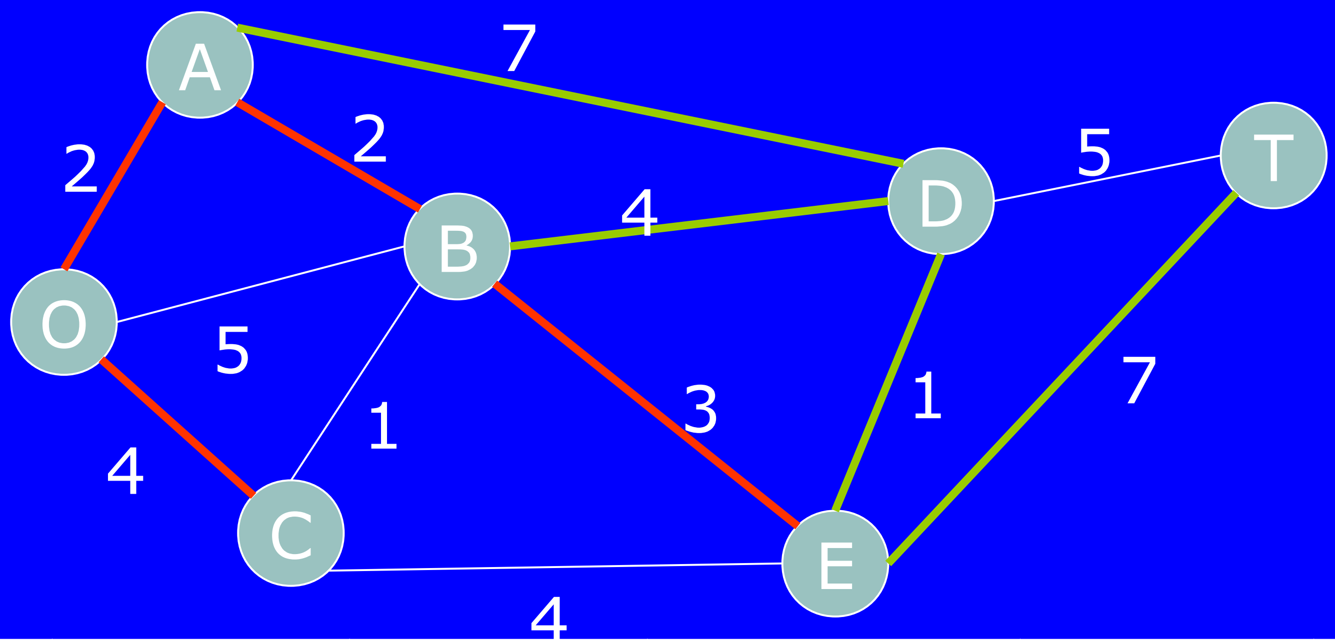
Nodi scelti connessi	Nodi candidati	Distanza tot (da O)	K-esimo nodo vicino	Distanza minima	Ultimo arco
A (D)	D	2+7=9			
B (D-E)	E, (D)	4+3=7			
C (E)					

Algoritmo per Cammino minimo



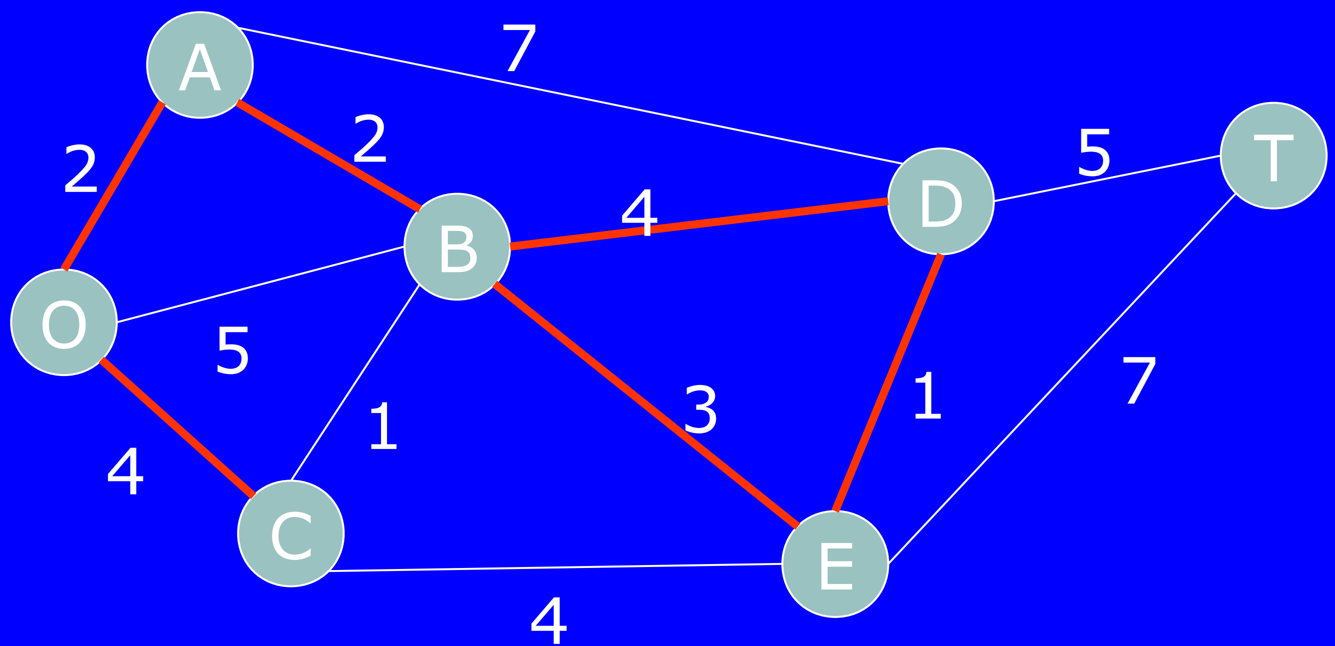
Nodi scelti connessi	Nodi candidati	Distanza tot (da O)	K-esimo nodo vicino	Distanza minima	Ultimo arco
A (D)	D	2+7=9			
B (D,E)	E	4+3=7	E	7	BE

Algoritmo per Cammino minimo



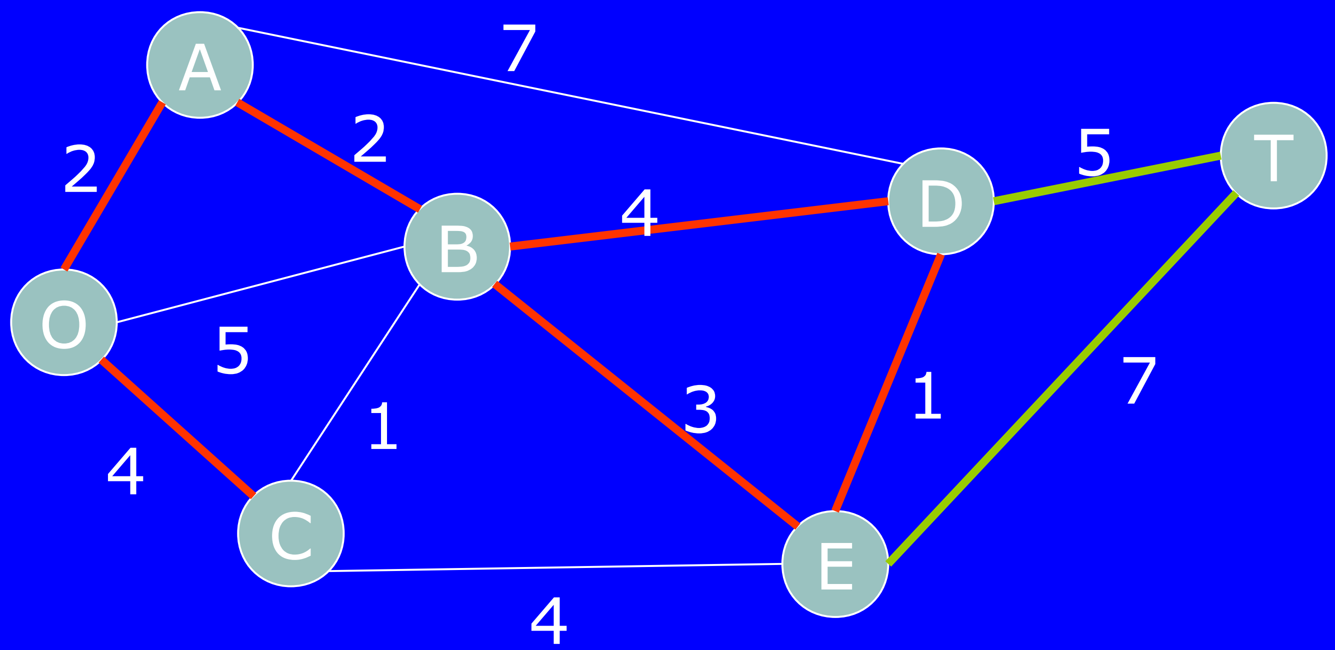
Nodi scelti connessi	Nodi candidati	Distanza tot (da O)	K-esimo nodo vicino	Distanza minima	Ultimo arco
A (D)	D	2+7=9			OA
B (D)	D	4+4=8			AB
E(D,T)	D	7+1=8			BE

Algoritmo per Cammino minimo



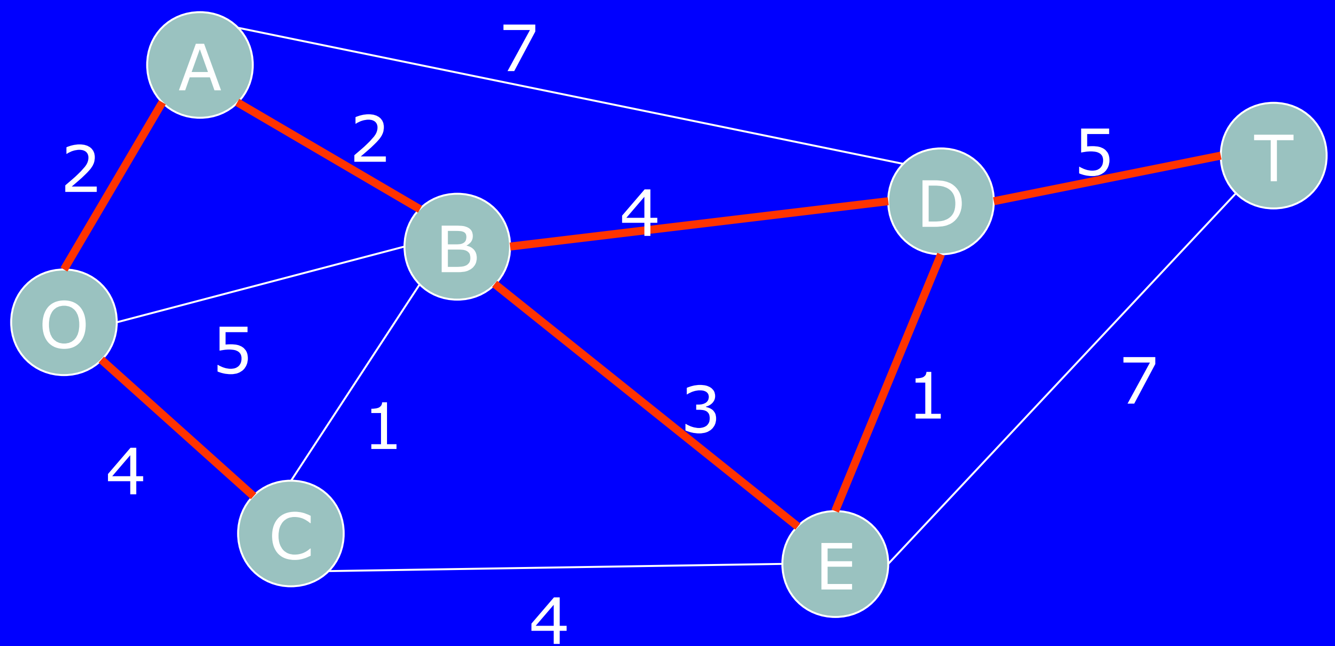
Nodi scelti connessi	Nodi candidati	Distanza tot (da O)	K-esimo nodo vicino	Distanza minima	Ultimo arco
B (D)	D	4+4=8	D	8	BD
E (D)	D (T)	7+1=8	E	8	ED

Algoritmo per Cammino minimo



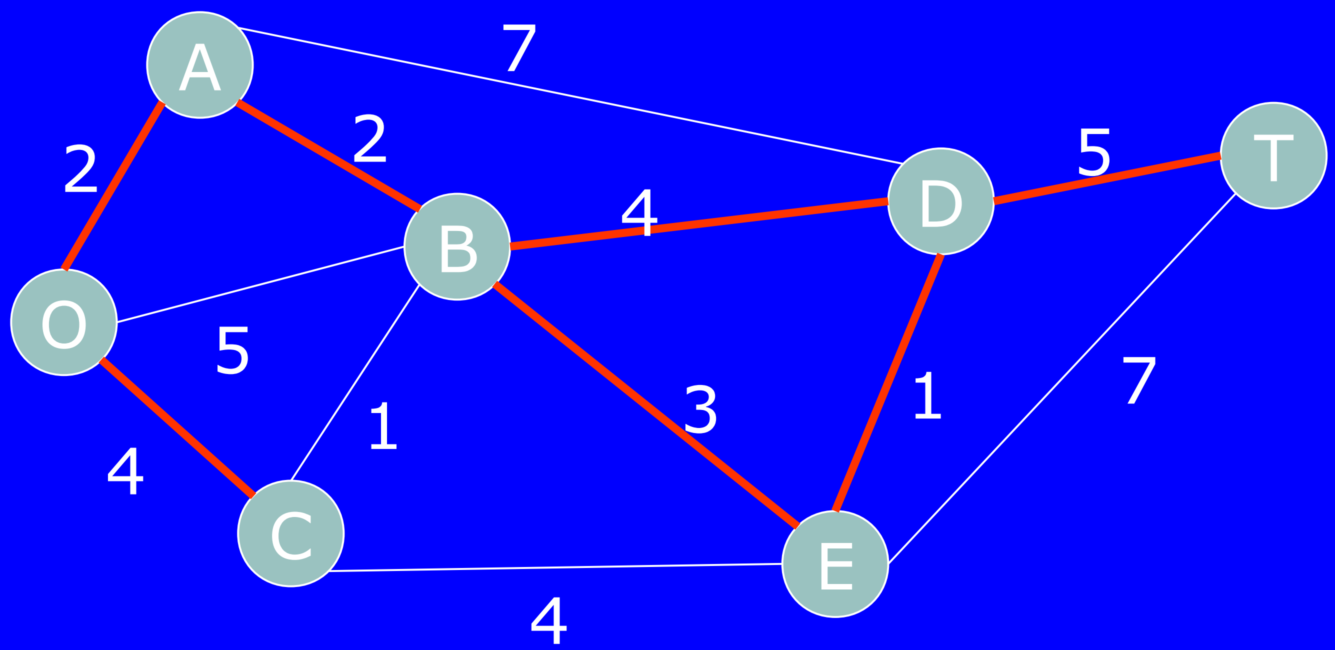
Nodi scelti connessi	Nodi candidati	Distanza tot (da O)	K-esimo nodo vicino	Distanza minima	Ultimo arco
D (T)	T	8+5=13			
E(T)	T	7+7=14			

Algoritmo per Cammino minimo



Nodi scelti connessi	Nodi candidati	Distanza tot (da O)	K-esimo nodo vicino	Distanza minima	Ultimo arco
D (T)	T	8+5=13	T	13	DT

Cammini minimi a Seervada Park



- O – A – B – D – T
- O – A – B – E - D – T

Lughezza 13

Modello di programmazione matematica

- Minimizzazione distanza percorsa:
  - se percorro un arco tengo conto della sua lunghezza c_{ij}, se non lo percorro non ne tengo conto.

Variabile

$$x_{ij} = \begin{cases} 0, & se\ non\ percorro\ l'arco\ ij, \\ 1, & se\ percorro\ l'arco\ ij. \end{cases}$$

La distanza percorsa è data dalla sommatoria

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

Vincoli

- Dal nodo ORIGINE esco e non vi entro più.
- Nel nodo DESTINAZIONE entro e non vi esco più.
- In ogni altro nodo se vi entro vi devo anche uscire.

FLUSSO NETTO =
FLUSSO IN USCITA – FLUSSO IN ENTRATA

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} - \sum_{i=1}^{n} x_{ij}$$

Vincoli

- ORIGINE:
FLUSSO NETTO = 1

$$\sum_{j=1}^{n} x_{Oj} - \sum_{i=1}^{n} x_{iO} = 1$$

- DESTINAZIONE:
FLUSSO NETTO = -1

$$\sum_{j=1}^{n} x_{Dj} - \sum_{i=1}^{n} x_{iD} = -1$$

- Ogni altro nodo:
FLUSSO NETTO = 0

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} - \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 0$$

Cammino minimo (PL)

$$\min \quad \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$s.a. \quad \sum_{j=1}^{n} x_{Oj} - \sum_{i=1}^{n} x_{iO} = 1,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{Dj} - \sum_{i=1}^{n} x_{iD} = -1,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} - \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 0,$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 0, & se \quad ij \quad non \quad viene \quad percorso, \\ 1, & se \quad ij \quad viene \quad percorso. \end{cases}$$

determinazione del cammino minimo a seervada park

da	a	flusso	distanza
O	A	1	2
O	B	1	5
O	C	1	4
A	B	1	2
A	D	1	7
B	A	1	2
B	C	1	1
B	D	1	4
B	E	1	3
C	B	1	1
C	E	1	4
D	A	1	7
D	B	1	4
D	E	1	1
D	T	1	5
E	B	1	3
E	C	1	4
E	D	1	1
E	T	1	7

nodi	flusso netto		domanda/offerta
O		=	1
A		=	0
B		=	0
C		=	0
D		=	0
E		=	0
T		=	-1

nomi celle	celle
a	=Foglio1!$C$4:$C$22
da	=Foglio1!$B$4:$B$22
distanza	=Foglio1!$E$4:$E$22
distanzatotale	=Foglio1!$D$24
domandaofferta	=Foglio1!$J$4:$J$10
flusso	=Foglio1!$D$4:$D$22
flussonetto	=Foglio1!$H$4:$H$10
nodi	=Foglio1!$G$4:$G$10

DISTANZA TOTALE	

determinazione del cammino minimo a seervada park

determinazione del cammino minimo a seervada park

da	a	flusso	distanza
O	A	1	2
O	B	0	5
O	C	0	4
A	B	1	2
A	D	0	7
B	A	0	2
B	C	0	1
B	D	0	4
B	E	1	3
C	B	0	1
C	E	0	4
D	A	0	7
D	B	0	4
D	E	0	1
D	T	1	5
E	B	0	3
E	C	0	4
E	D	1	1
E	T	0	7

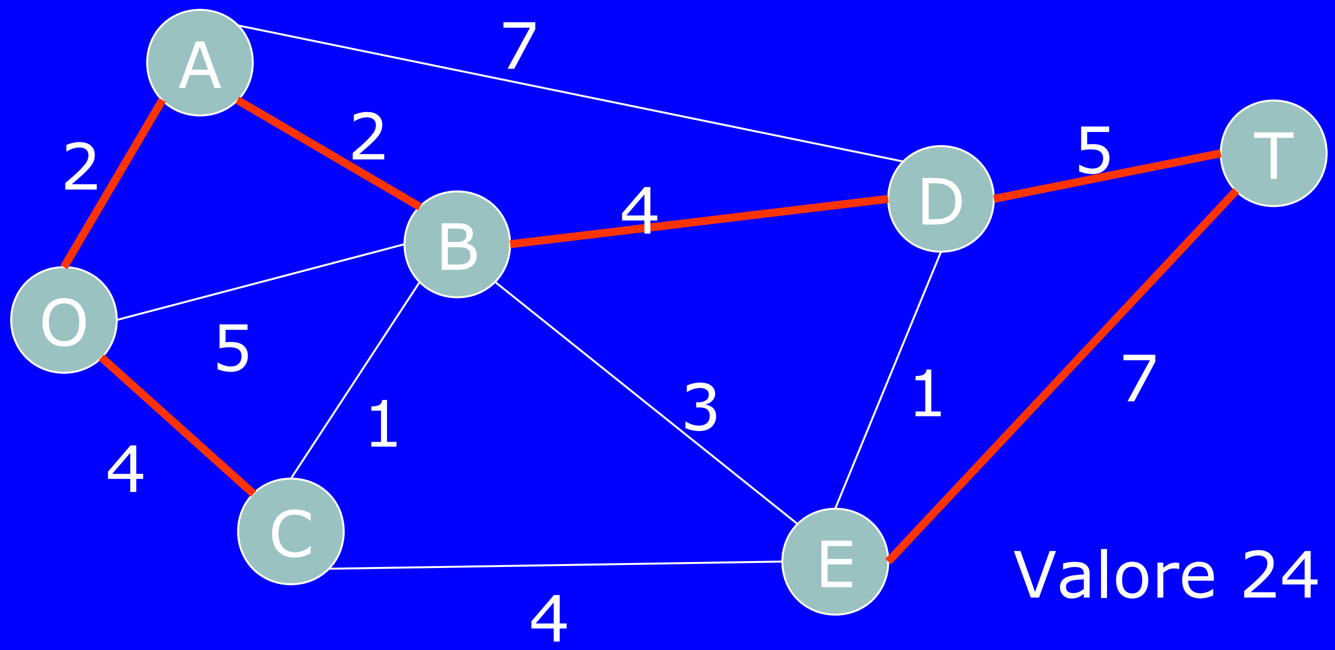
DISTANZA TOTALE 13

nodi	flusso netto		domanda/offerta
O	#NOME?	=	1
A	#NOME?	=	0
B	#NOME?	=	0
C	#NOME?	=	0
D	#NOME?	=	0
E	#NOME?	=	0
T	#NOME?	=	-1

nomi celle	celle
a	=Foglio1!$C$4:$C$22
da	=Foglio1!$B$4:$B$22
distanza	=Foglio1!$E$4:$E$22
distanzatotale	=Foglio1!$D$24
domandaofferta	=Foglio1!$J$4:$J$10
flusso	=Foglio1!$D$4:$D$22
flussonetto	=Foglio1!$H$4:$H$10
nodi	=Foglio1!$G$4:$G$10

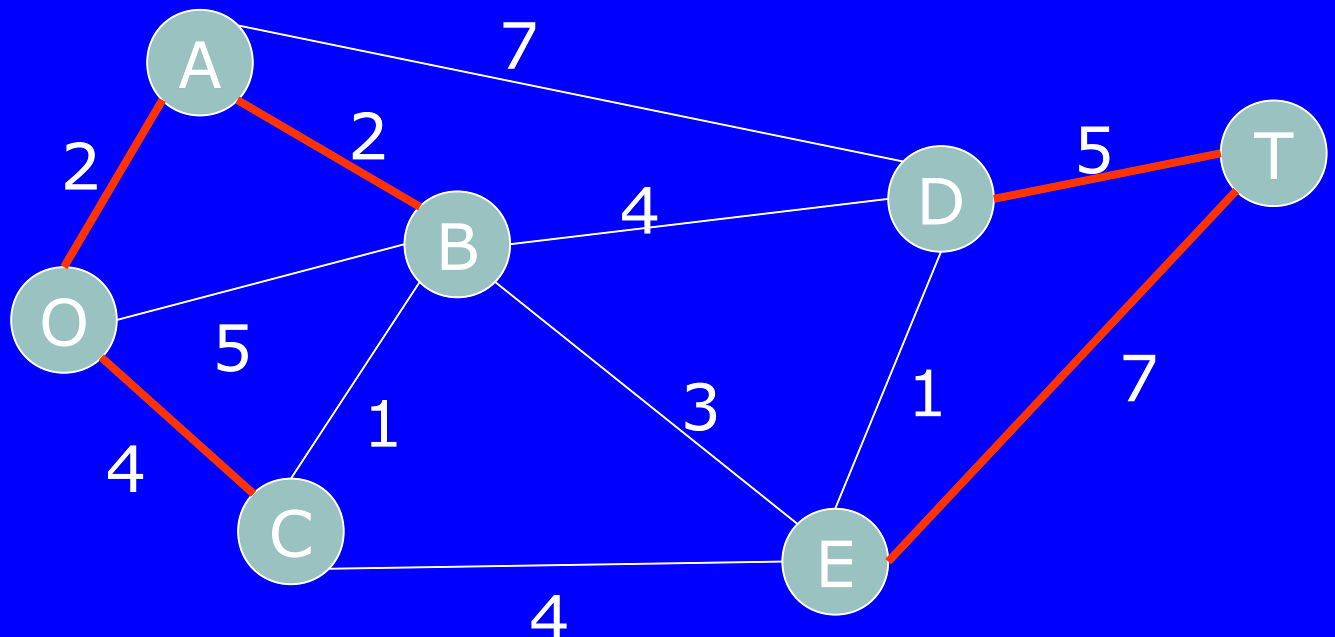
Albero Ricoprente

- Albero (tree): sottografo connesso aciclico



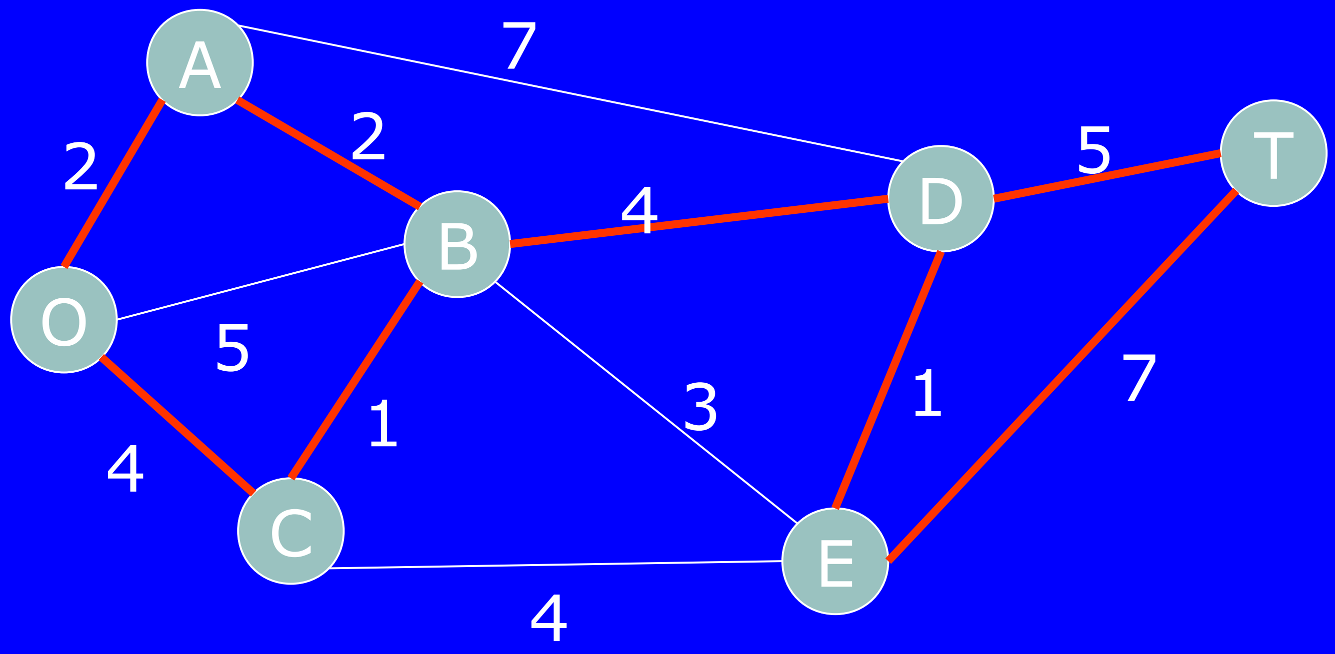
Albero Ricoprente

- No Albero: sconnesso



Albero Ricoprente

- No Albero: ciclico

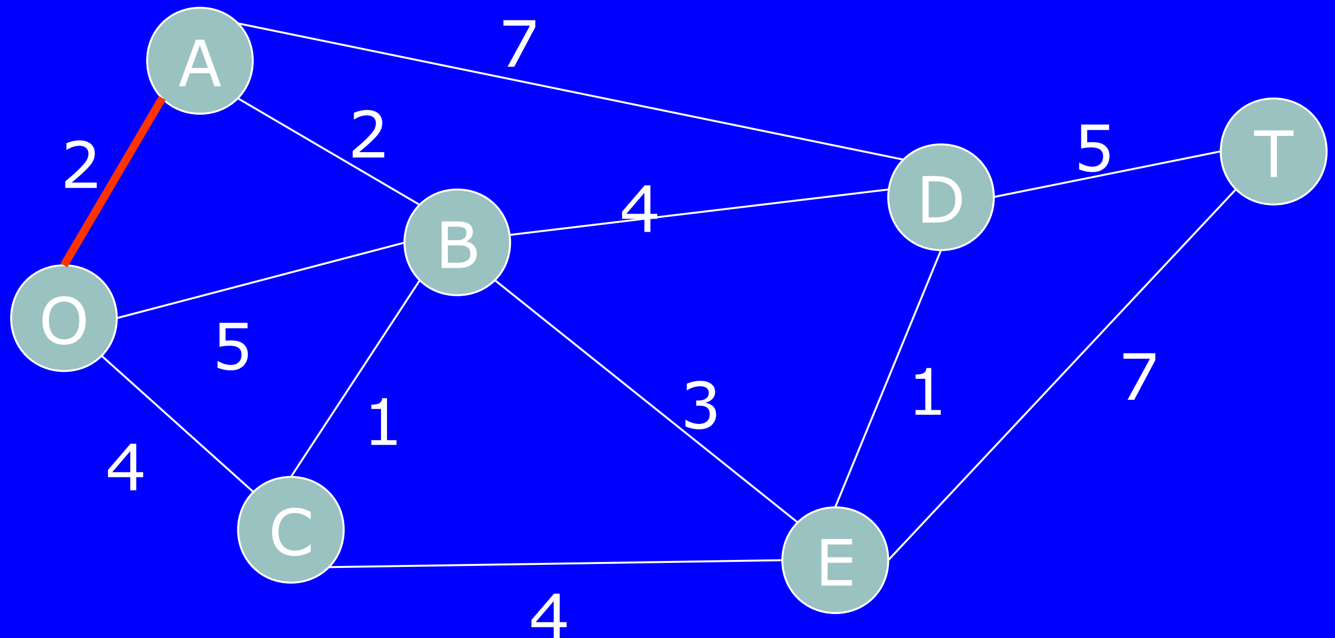


Minimo albero Ricoprente
Progettazione di reti

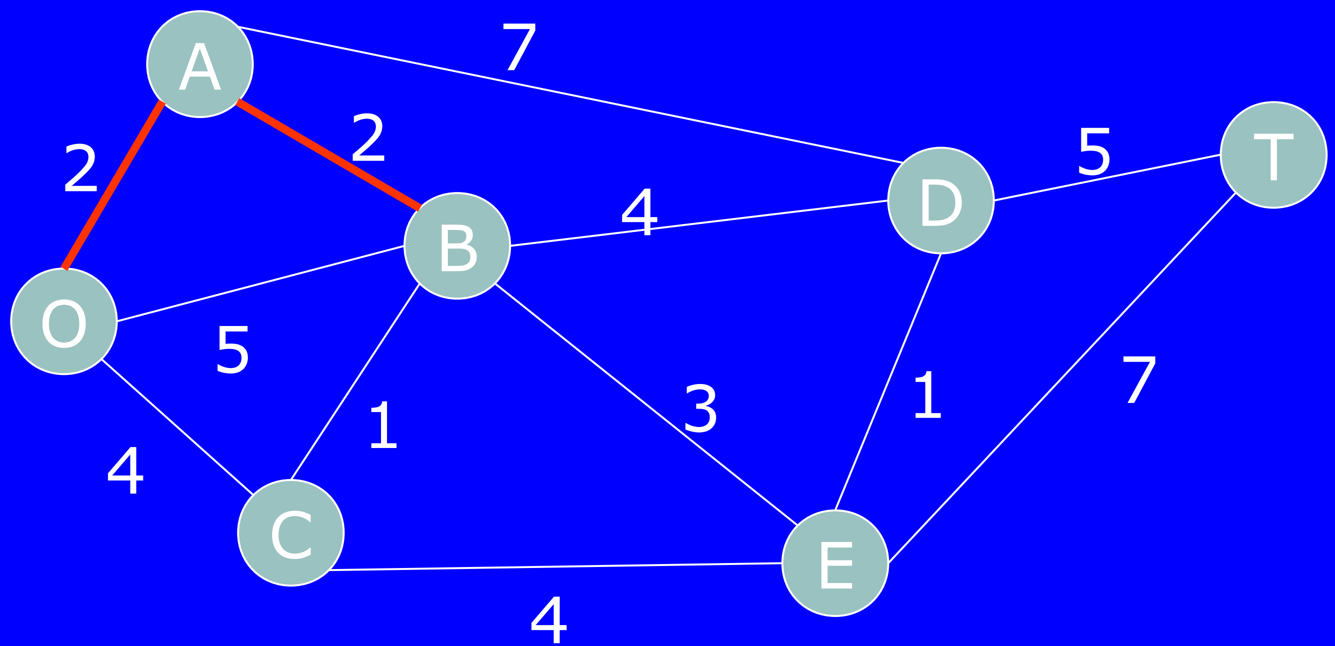
- Rete di comunicazioni
  (fibre ottiche – tv via cavo)
- Rete di trasporto, min costi costruzione
  (strade – ferrovie)
- Rete trasmissione elettrica alto voltaggio
- Rete collegamenti elettrici (computer) min lunghezza collegamenti

Minimo albero Ricoprente

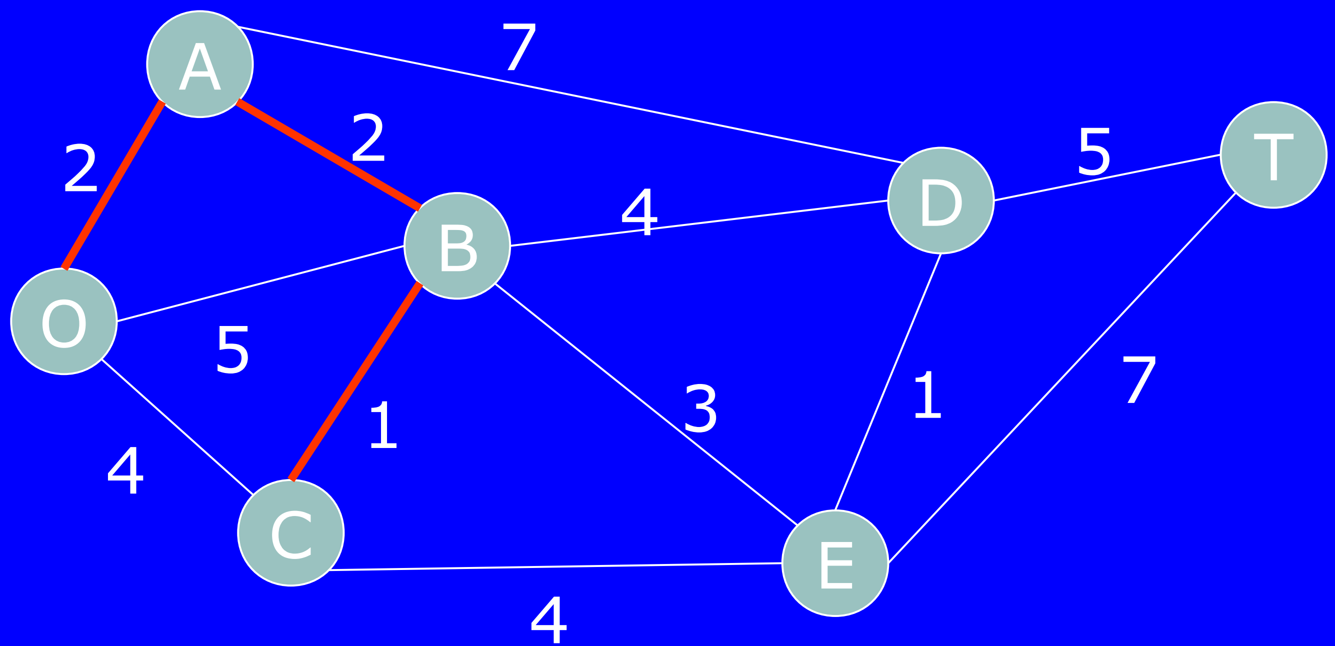
- Albero di lunghezza minima
  (si parte da un nodo qualsiasi)



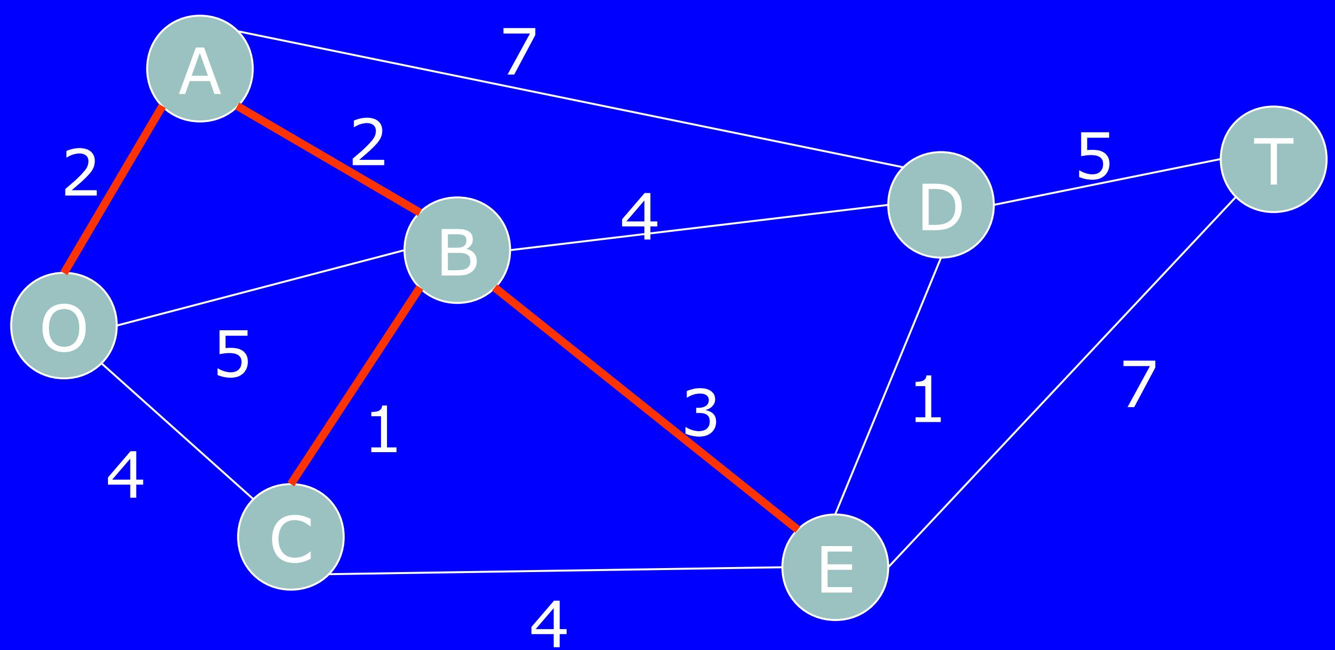
Minimo albero Ricoprente



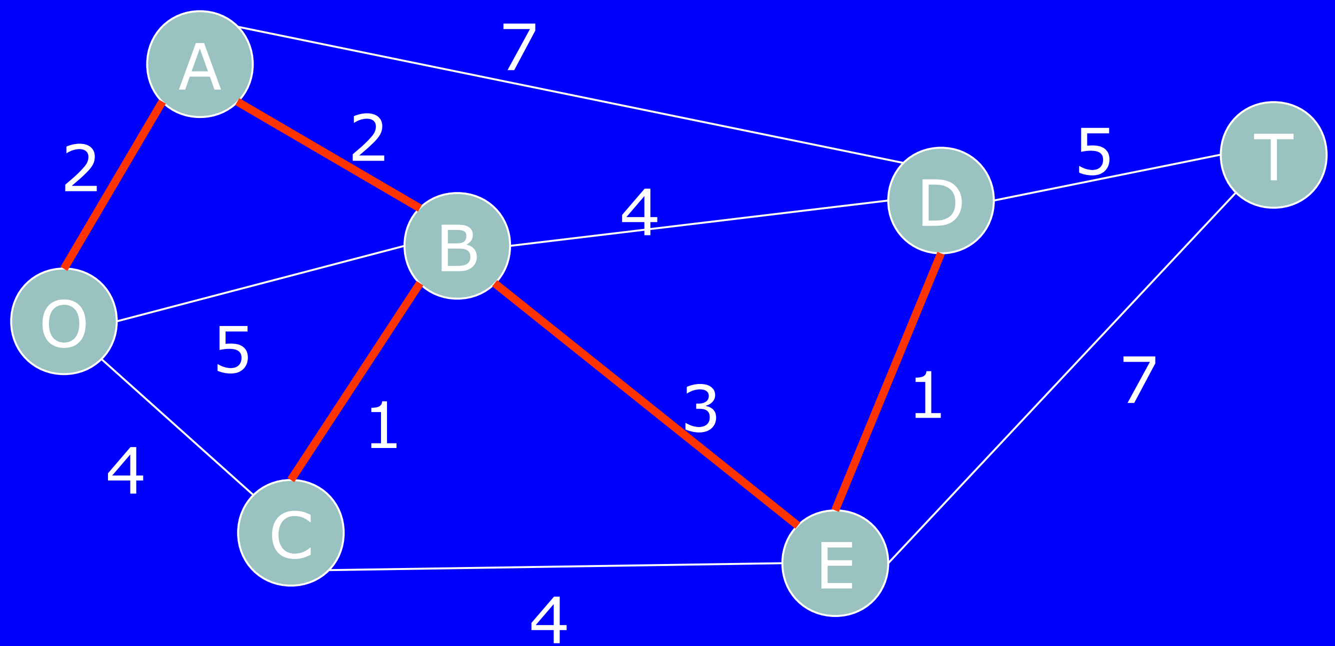
Minimo albero Ricoprente



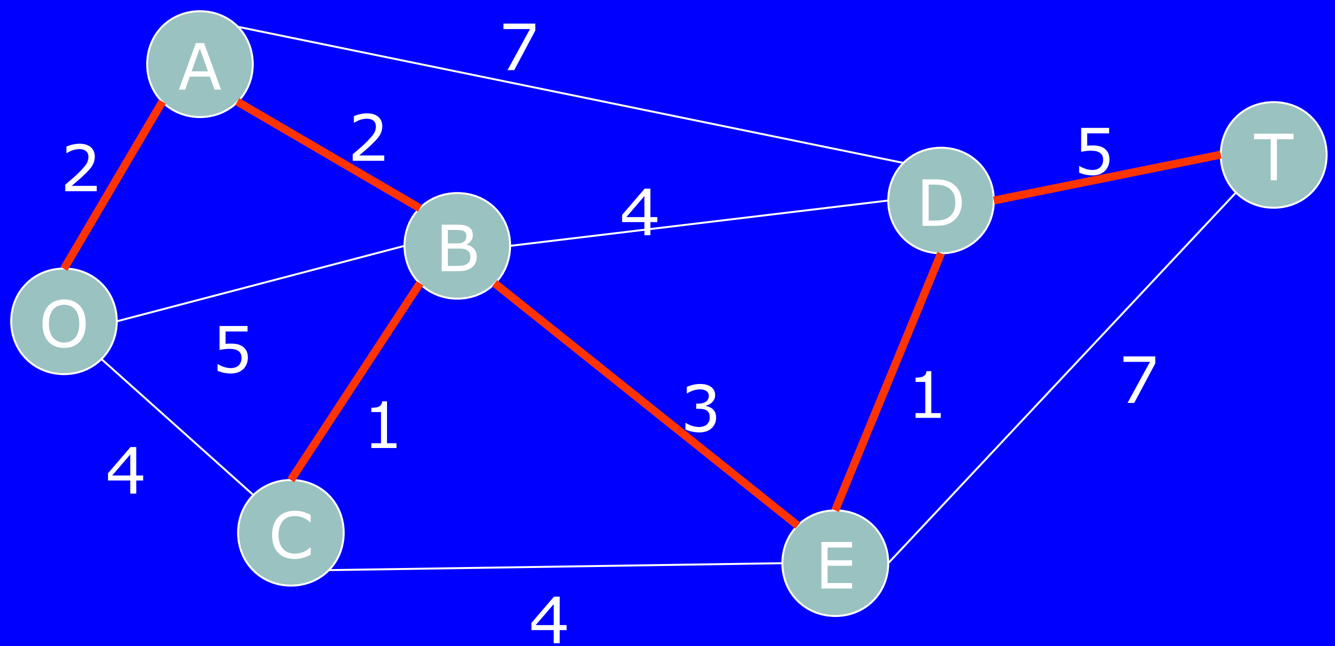
Minimo albero Ricoprente



Minimo albero Ricoprente



Minimo albero Ricoprente



Valore 14