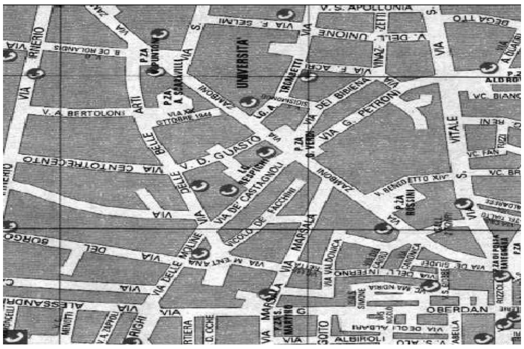
## *Introduzione alla TEORIA DEI GRAFI*

La teoria dei grafi è una parte importante della **Ricerca Operativa (R.O.)**.
***Come per gli altri problemi affrontati nella R.O. Si tratta di risolvere*** problemi di minimo (o di massimo) sotto opportune restrizioni poste dal problema preso in esame e riguardanti aspetti economici o ingegneristici.

La Teoria dei Grafi si occupa di problemi che possono essere visualizzati mediante grafici in cui compaiono punti (detti nodi), linee che congiungono tali punti (archi); tali problemi sono poi riconducibili ad una formulazione matematica simile a quella già vista nella programmazione lineare.

La Teoria dei Grafi è l'insieme definizioni, teoremi e metodi risolutivi (algoritmi anche implementabili su computer) che permettono di capire per esempio quale sia il percorso minimo tra due punti, il percorso più conveniente per passare attraverso tutte le strade di una città o viceversa il percorso più conveniente per raggiungere tutti gli incroci delle strade della stessa città.




Si parla flusso quando vogliamo descrivere il numero di unità (per esempio autoveicoli) che passano su una strada (arco del grafo).

ES: I vertici di un grafo potrebbero essere i vari uffici di una società e gli archi potrebbero essere quelle coppie di uffici fra i quali c'è uno scambio diretto di informazioni per il completamento di pratiche.
ES:i vertici di un grafo potrebbero essere le varie tappe (eventi) nelle quali si articola l'esecuzione di un progetto e gli archi potrebbero essere quelle coppie di tappe (privilegiate) per le quali si richiede lo svolgimento di un'attività per passare da una tappa alla successiva.

Ora vedremo un insieme di definizioni e termini che riguardano la rappresentazione dei problemi in forma di GRAFO. Esistono teoremi ed algoritmi che permettono di dire se alcuni problemi sono risolvibili o meno; in molti casi i problemi visualizzabili mediante un grafo sono riconducibili a problemi di programmazione lineare (PL) e quindi risolvibili mediante l'utilizzo del RISOLUTORE di EXCEL.
Un problema è dunque rappresentabile mediante
- equazioni e disequazioni (problema di PL)
- grafo
- matrice

### Definizione di Grafo

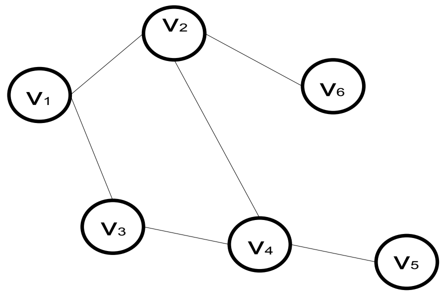
chiamiamo GRAFO una figura piana costituita da *n* punti detti *nodi* collegati da un certo numero di segmenti o linee, detti *archi.*

Un GRAFO è quindi definito da due insiemi $(V,E)$, ove $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ *è* un insieme finito di elementi detti *nodi (i vertici del grafo),* mentre

$E = \{e_1, \ldots, e_m\} = \{(v_1,v_2),(v_1,v_3) \ldots (v_k, v_n)\} \subseteq V \times V$ *è* un sottoinsieme di coppie ordinate di nodi dette *archi*.
*(terminologia: nodi V per la parola inglese "vertex" e archi E per la parola "edge"* nei testi italiani si troverà N al posto di V*).*

La rappresentazione grafica di un grafo è data in Figura, ove $V = \{v_1, \ldots, v_6\}$, mentre
$E = \{e_1, \ldots, e_8\}$. I nodi sono rappresentati con cerchi mentre gli archi sono le linee congiungenti due nodi.

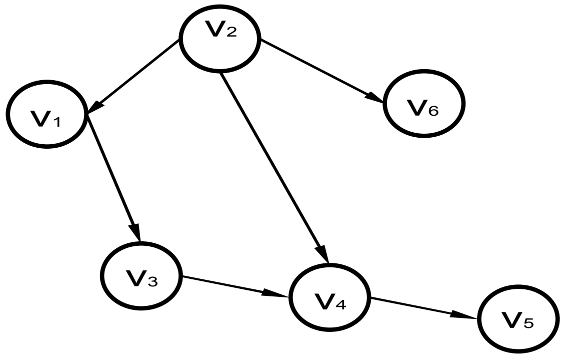
<u>Ordine di un vertice</u>**:**il numero di archi aventi come estremo il vertice considerato




**Grafo orientato**

un grafo si dice orientato se lo sono i suoi archi. E' quindi definito da due insiemi (V,*A*), ove V = *{v*1, . . . , *vn} è* l'insieme finito di *,* mentre $A = \{a_1 , \dots , a_m\}$è l'insieme degli archi (terminologia: A dalla parola ingelse "*arrow*").

$a_k = (v_i , v_j ) \neq (v_j , v_i )$ coppie ordinate $v_i$ coda (tail), $v_j$ testa (head)




Di seguito considereremo solo *grafi semplici* ovvero grafi privi di *loop* (*cappio, anello* - archi di tipo (*u,u*) per qualche $u \in V$), e di archi paralleli (coppie di archi uguali).
Quindi, i grafi considerati conterranno al più un arco per ogni coppia di nodi e i nodi dell'arco devono essere distinti.
Per ogni arco orientato o non orientato $(v_i , v_k) \equiv e$ diremo

- $v_i$ *adiacente* a $v_k$.(Due nodi si dicono adiacenti se sono connessi da un arco).
- due archi sono adiacenti (consecutivi) se hanno un nodo in comune

Un grafo si dice ***completo*** se ogni suo vertice è collegato con almeno un altro vertice.

Dato un grafo , si dice ***cammino*** (o ***catena*** se il grafo non è orientato) da A a B un insieme ordinato di nodi, con inizio in A e termine in B, tale che per ogni coppia di nodi consecutivi dell'insieme esista un arco del grafo che colleghi i nodi stessi.(sequenza di archi consecutivi).

In un grafo si dice ***ciclo o circuito*** un cammino il cui nodi iniziale e finale coincidono.

"Un cammino o un ciclo è ***semplice***: se non vi sono ripetizioni di archi
***elementare***: se non vi sono ripetizioni di nodi elementare => semplice"

Un grafo non orientato si dice ***connesso*** se esiste una catena per ogni coppia di nodi del grafo.
Un Grafo orientato si dice ***fortemente connesso*** se data una coppia qualunque di nodi è possibile determinare un cammino che li unisce.
(ad esempio in un grafo urbanistico ciò significa che per ogni coppia di piazze esiste una successione di strade che le collega. Per la viabilità urbana il grafo che riproduce strade e piazze deve essere fortemente connesso).

Un cammino si dice ***Euleriano*** se si può percorrere totalmente e senza interruzioni e senza passare più di una volta per lo stesso arco. (tutti gli archi vengono percorsi una e una sola volta. Eulero non può passare più di una volta su una stessa strada)
G***rafo Euleriano*** un grafo in cui esiste un cammino Euleriano.

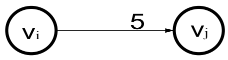
*Condizione necessaria e sufficiente affinchè un grafo orientato abbia circuiti euleriani è che il il grafo sia connesso e che da ogni vertice partano tanti archi quanti arrivano (cioè si dice che ogni vertice ha grado locale pari)*

Un cammino si dice ***Hamiltoniano*** se tocca una e una sola volta ogni vertice. (tutti i vertici sono raggiunti una e una sola volta. Hamilton non può visitare più di una volta una stessa piazza)
***Grafo Hamiltoniano*** un grafo in cui esiste un cammino Hamiltoniano.

Esistono programmi efficienti che possono decidere se un grafo è euleriano, non ci sono tali programmi per i grafi hamiltoniani.

Si definisce **ALBERO** un grafo non orientato, connesso e privo di cicli

**GRAFI VALUTATI**
possiamo pensare di "depositare" sull'insieme dei vertici o degli archi (o di entrambi) di un grafo, alcune informazioni quantitative che diremo VALUTAZIONI degli archi o dei vertici.




$c(v_j , v_k ) = c(e_i) = c(a_i) = c_i = c_{jk} = 5$

**ES-1:** grafo in cui i vertici rappresentano centri abitati di una regione e gli archi rappresentano i tronchi stradali che collegano i centri.

Gli archi vengono valutati associando loro
1) la distanza in Km. fra due vertici adiacenti
2) tempo medio di percorrenza della strada
3) numero di persone/ora transitate nella strada

I vertici si possono valutare associando loro
1) numero di caselli(in caso di autostrada) presenti nel vertice
2) costo de personale addetto ai pedaggi (caso autostradale)
3) numero di persone entrate in paese in un fissato periodo

**ES-2**: grafo in cui i vertici rappresentano le tappe che rappresentano lo stato di avanzamento di un progetto e gli archi rappresentano l'attività da compiere per avanzare nella realizzazione del progetto.

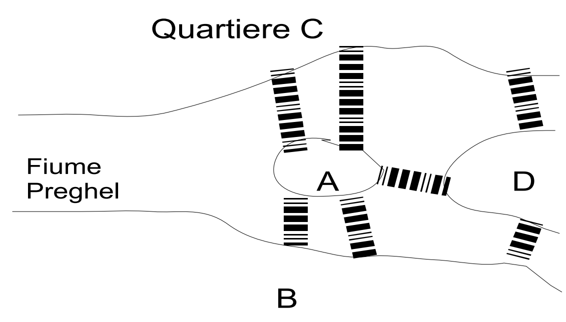
Gli archi vengono valutati associando loro
1) stima del tempo di esecuzione dell'attività
2) quantità delle risorse impiegate nell'attività
3) costo delle risorse impiegate nell'attività

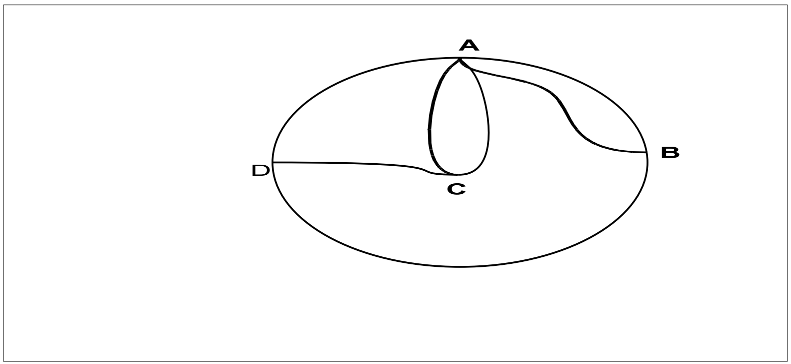
I vertici si possono valutare associando loro
1) data prevista per il raggiungimento della tappa

## Problemi visualizzabili tramite grafi

1. *Problema di Eulero per la passeggiata attraverso i ponti di Köenisberg*

Köenisberg (oggi Kaliningrad) è una città della Prussia Orientale, attraversata dal fiume Preghel che in città si biforca in due rami dividendo la città in quattro quartieri A, B, C, D congiunti da sette ponti come in figura.
Fra gli abitanti della città era sorto il problema se fosse possibile effettuare un passeggiata che, partendo da uno qualsiasi dei quattro quartieri, vi facesse ritorno, passando una ed una sola volta per ciascun ponte.
La risposta negativa fu data da Eulero (a 31 anni). Egli schematizzò il problema identificando i quartieri con nodi di un grafo e i ponti con gli archi

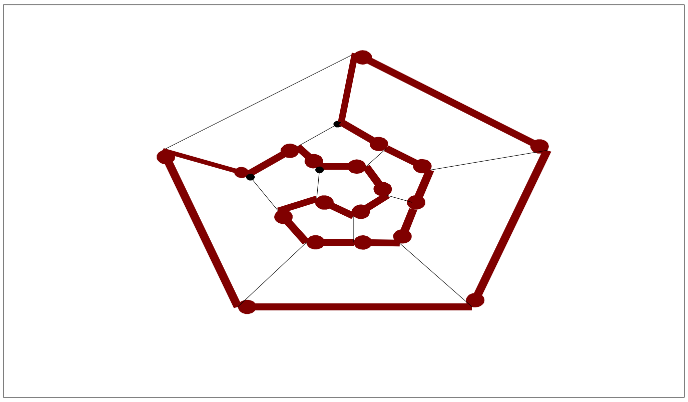





Ogni vertice ha grado locale dispari (cioè da ogni vertice partono un numero dispari di archi). Manca quindi la condizione necessaria perché nel grafo esista un circuito euleriano che, appunto, consenta di realizzare la passeggiata passante per tutti i ponti (cioè per tutti gli archi del grafo) senza mai tornare su un medesimo ponte (e quindi percorrendo ciascun arco una ed una sola volta).

## 2. *Problema del commesso viaggiatore*

Nel 1859 sir William Rowan Hamilton (matematico irlandese) propose un rompicapo consistente nella ricerca di un cammino continuo lungo gli spigoli del grafo della figura in modo da toccare ciascun vertice una ed una sola volta come per esempio quello che in figura è marcato in neretto. Si tratta della ricerca in un grafo di un circuito che sia il migliore in quanto a tempo di percorrenza o lunghezza del cammino.
E' il problema che nel mondo dell'economia viene denominato PROBLEMA DEL COMMESSO VIAGGIATORE.



I vertici del grafo si possono pensare come città (punti vendita) che il commesso viaggiatore partendo da casa (dove alla fine deve tornare) dovrà toccare (ciascuna una sola volta) per visitare i propri clienti.

## 3. *Trovare un cammino del grafo che congiunga un vertice con un altro*

Come esempio di tale problema si può mostrare la visualizzazione mediante grafi del problema della pecora, del lupo e del cavolo. Lupo (indicato con L), pecora (indicata con P) e cavolo (indicato con C) si trovano sulla riva di un fiume e devono essere portati sull'altra riva da un barcaiolo (indicato con B) mediante una barca tanto piccola da poter portare oltre al barcaiolo solo il lupo o solo la pecora o solo il cavolo. Inoltre il barcaiolo non può lasciare senza sorveglianza il lupo in compagnia della pecora o la pecora in compagnia del cavolo.

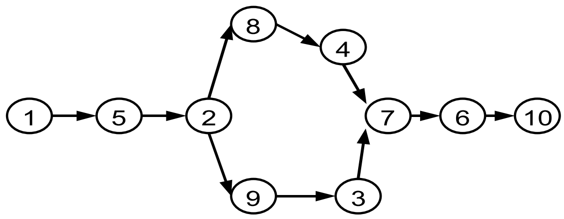
Inizialmente sulla riva destra si trovano (L, P, C, B) mentre sull'altra riva non c'è nessuno Ø. Lo stato iniziale sulle due rive viene rappresentato dagli insiemi (L,P,C,B) e Ø.
Prescindendo dai vincoli tutti gli stati possibili sulle due rive sono quelli indicati nella tabella a fianco.

Non tutti gli stati sono possibili. I vincoli rendono impossibili i casi evidenziati con un asterisco
Restano quindi i casi numerati a sinistra.

Si può allora costruire un grafo considerando come vertici i dieci stati possibili della riva destra del fiume e come archi quelle coppie privilegiate di stati della riva destra per i quali è possibile passare da uno stato all'altro mediante l'operazione di una sola passata con la barca.

Le coppie privilegiate (ammissibili per i vincoli imposti dal problema cioè facendo in modo di trasportare barcaiolo e un solo oggetto alla volta e evitando di lasciare incustoditi pecora e lupo o pecora e cavolo) sono: (1,5); (2,5); (2,8); (2,9); (3,7); (3,9); (4,7); (4,8); (6,7); (6,10) e le coppie opposte.

| | Riva destra | Fiume | Riva sinistra | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | L,P,C,B | | Ø | |
| 2 | L,C,B | | P | |
| 3 | P,C,B | | L | |
| 4 | P,L,B | | C | |
| * | P,L,C | | B | |
| | C,B | | P,L | * |
| | L,B | | P,C | * |
| 5 | L,C | | P,B | |
| 6 | P,B | | L,C | |
| * | P,C | | B,L | |
| * | L,P | | C,B | |
| | B | | P,L,C | * |
| 7 | P | | L,C,B | |
| 8 | L | | P,C,B | |
| 9 | C | | L,P,B | |
| 10 | Ø | | L,P,C,B | |



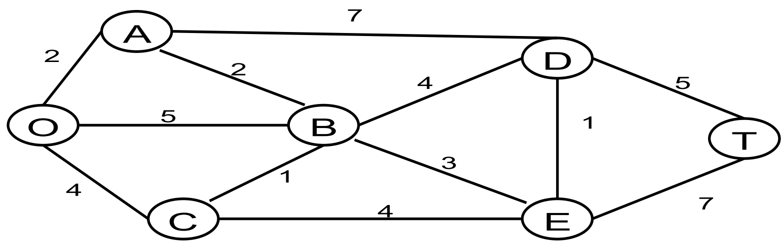

La soluzione del problema si traduce nella ricerca di un cammino che parta dal vertice 1 e finisca al vertice 10.
si vede che esistono i due cammini proposti in figura ed entrambi sono soluzione del problema.

4. *problema del cammino minimo (Shortest Path Problem, SPP)*

trovare un cammino di costo (lunghezza) minimo che nel grafo orientato $G=(V,A)$, pesato sugli archi con costi $c_{ij}$ , congiunga un vertice t con un vertice s

Abbiamo visto il problema di Seervada Park

Tale problema è esprimibile mediante un grafo




mediante equazioni e disequazioni formulando un problema di programmazione lineare
(anche mediante una matrice)

## Funzione obiettivo

$C_{ij}$ = lunghezza di un arco

$x_{ij} = 0$ Se non percorro l'arco di estremi i j
$= 1$ Se percorro l'arco di estremi i j

La distanza percorsa è data dalla sommatoria $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$

## Vincoli

- dal nodo origine esco e non entro più
- dal nodo destinazione arrivo ma non esco
- in ogni altro nodo se vi entro vi devo anche uscire e quindi il flusso netto (cioè dl differenza tra quanto esce e quanto entra) è uguale a zero

nel nodo 's'

$$\sum_{j=1}^{n} x_{sj} - \sum_{i=1}^{n} x_{is} = 1 \quad \text{se } s = O \text{ origine}$$
$$= -1 \quad \text{se } s = T \text{ destinazione}$$
$$= 0 \quad \text{in ogni altro nodo } s$$

## Il problema di P.L. diventa

$$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

soggetto ai vincoli

$$\sum_{j=1}^{n} x_{Oj} - \sum_{i=1}^{n} x_{iO} = 1$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{Tj} - \sum_{i=1}^{n} x_{iT} = -1$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{sj} - \sum_{i=1}^{n} x_{is} = 0$$

5. *problema del più corto albero ricoprente ST (Shortest ST, SST)*

**Albero ricoprente (Spanning Tree, *ST* )** di G(V,A) è un sottografo di G(V,A) non completo che connette ciascun nodo originario. Ha quindi lo stesso numero di vertici ed un minor numero di archi, ma ogni vertice deve essere non isolato.

**Problema del più corto albero ricoprente ST (Shortest ST, SST)**

• Dato *G*=(*V*,*E*) pesato e connesso, trovare lo *ST* *G'*=(*V*,*E'*) tale che il costo $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$ sia minimo

Applicazioni:

• combinare i terminali di un circuito elettrico con minima lunghezza di filo (per ridurre effetti parassiti)
• collegare città mediante condutture a costo minimo senza punti di giunzione esterni

Un problema di minimo albero ricoprente è riconducibile ad un problema di programmazione lineare

min $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$

soggetto ai vincoli

$$\sum_{j=1}^{n} x_{Oj} - \sum_{i=1}^{n} x_{iO} = 1$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{Tj} - \sum_{i=1}^{n} x_{iT} = -1$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} x_{ij} = n-1$$

**MATRICI** per rappresentare grafi

i problemi visualizzabili tramite grafi sono esprimibili anche mediante opportune matrici (tabelle contenente numeri in riga e colonna tipo battaglia navale).

**Matrice d'adiacenza**

Questa matrice quadrata ha dimensioni n×n, dove con n indichiamo il numero dei vertici del grafo.

Per la generica casella ij si porrà $m_{i,j}$ = 0 se non esiste un arco che unisce il vertice $v_i$ con $v_j$
= 1 se esiste un arco che unisce il vertice $v_i$ con $v_j$
**(cioè se i vertici i e j sono adiacenti)**

**Proprietà 1**

La somma degli elementi della generica riga r ci dice con quanti nodi è connesso il nodo della riga.

**Proprietà 2**

La matrice d'adiacenza nel caso di grafi semplici è sempre **unimodulare** ovvero, il determinante di qualsiasi suo minore sarà pari ad 1, 0 o -1.

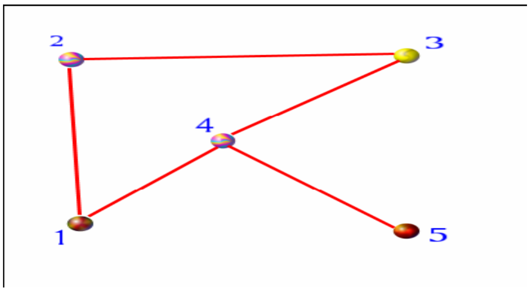
**Proprietà 3**

La matrice d'adiacenza è una matrice simmetrica se i grafi non sono orientati.

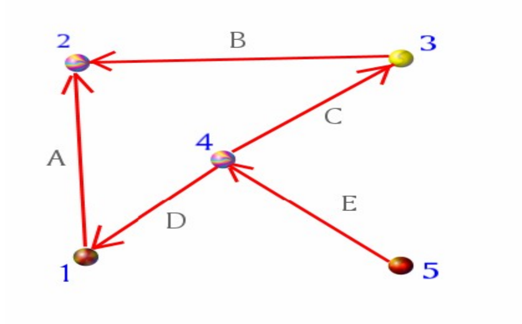
**Proprietà 3**

La potenza di grado n di una matrice d'adiacenza dice per ogni posizione ij se c'è un cammino lungo n che unisce il nodo i con il nodo j

*Esempio 1*




*Esempio 2*




La rispettiva matrice d'adiacenza ci dice che il nodo 1 è collegato a 2 nodi, il nodo 5 ad uno solo e il nodo 4 è quello che ha più connessioni. Lo stesso ragionamento vale per gli altri due nodi.

| | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 2 |
| **2** | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 2 |
| **3** | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 2 |
| **4** | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 3 |
| ***5*** | *0* | *0* | *0* | *1* | *0* | *1* |

Ora, nel caso di grafi orientati, la matrice d'adiacenza non sarà più simmetrica in quanto l'1 verrà messo solo dove l'arco è percorribile.

| | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| **2** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **3** | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| **4** | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| **5** | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |

**Matrice d'incidenza**

Questa matrice è invece n×m dove sulle righe abbiamo i nodi e sulle colonne gli archi del grafo.

La matrice viene riempita in questo modo:

sulla riga di ogni nodo si mette un 1 in corrispondenza dell'arco con il quale viene connesso ad altri nodi

Se volessimo descrivere il grafo dell'*esempio 2* con la matrice d'incidenza dovremmo prima etichettare gli archi e poi mettere un '1' per un arco uscente dal nodo ed un '-1' per un arco entrante.

| | **A** | **B** | **C** | **D** | **E** |
|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 1 | 0 | 0 | -1 | 0 |
| **2** | -1 | -1 | 0 | 0 | 0 |
| **3** | 0 | 1 | -1 | 0 | 0 |
| **4** | 0 | 0 | 1 | 1 | -1 |
| **5** | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |