

COMBINAZIONE LINEARE

Siano x ed y due variabili; si costruisce una combinazione lineare di x e y moltiplicandole ciascuna per un coefficiente e sommando i prodotti così ottenuti. Per esempio:

$$3x + 2y$$

oppure

$$ax + by$$

b) è possibile generalizzare il discorso a più di due variabili;

Definition 1. se $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n$ designano n variabili, e $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n$ sono n coefficienti, l'espressione

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 + \dots + a_nx_n$$

è una combinazione lineare di n variabili.

EQUAZIONE

Definition 2. Uguaglianza tra due espressioni una almeno delle quali contenga una o più incognite.

Example 3. eq. in 1 variabile: $3x + 2 = x - 1$ oppure $x^3 - 3x + 2 = x^2 - 1$

eq. in 2 variabili: $2x + y = x - 3y$ oppure $x^2 + y^2 = 4$ oppure $2x^3 + xy = y^2 - 1$

SOLUZIONE di un'equazione

Definition 4. si dice soluzione di un'equazione il numero (caso di una variabile) o la coppia di numeri (x, y) nel caso di due variabili) o la n -upla $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ nel caso di n variabili) che rendono vera l'uguaglianza.

Example 5. l'equazione $x + 3y - 1 = 0$ ha come soluzioni l'insieme dei punti $P(x, y)$ che rendono vera l'uguaglianza, cioè l'insieme di tutti i punti del piano che appartengono ad una retta.

SISTEMA di equazioni

Definition 6. insieme di equazioni. E' caratterizzato da: numero di equazioni, numero delle incognite, grado (se esiste).

SOLUZIONE di un sistema

Definition 7. si dice soluzione di un sistema in n incognite, un insieme ordinato di n numeri capaci di rendere contemporaneamente verificate tutte le equazioni del sistema.

DISEQUAZIONE

Definition 8. si chiama disequazione in una variabile una espressione riconducibile alla forma $f(x) > 0$ oppure $f(x) < 0$.

Se le variabili sono due l'espressione è riconducibile alla forma $f(x, y) > 0$ oppure $f(x, y) < 0$.

SOLUZIONE di una disequazione

Definition 9. risolvere una disequazione vuol dire, nel caso di una sola variabile, trovare i valori o l'insieme di valori (della variabile) che rendono vera la scrittura $f(x) > 0$ (o $f(x) < 0$), oppure,

nel caso di due variabili, l'insieme delle coppie (x, y) di punti del piano che soddisfano l'espressione $f(x, y) > 0$ (o $f(x, y) < 0$).

Example 10.

- $x^2 - 3x + 2 \leq 0$ ha come soluzioni l'intervallo $[1, 2]$ della retta reale
- $x^2 + y^2 \leq 4$ ha come soluzioni tutti i punti del piano reale \mathbb{R}^2 che sono all'interno della circonferenza di centro l'origine e raggio 2 e i punti della circonferenza stessa.
- $3x - 2y + 1 \geq 0$ ha come soluzioni tutti i punti di uno dei due semipiani individuati dalla retta $3x - 2y + 1 = 0$

SISTEMA di disequazioni

Definition 11. insieme di disequazioni. E' caratterizzato da: numero di disequazioni, numero delle incognite, grado (se esiste).

SOLUZIONE di un sistema di disequazioni

Definition 12. si dice soluzione di un sistema di disequazioni l'insieme dei valori della variabile (o nel caso di due variabili l'insieme delle coppie di valori) capaci di rendere contemporaneamente verificate tutte le disequazioni del sistema.

Warning 13. in pratica, contrariamente a quanto si fa per i sistemi di equazioni, per i sistemi di disequazioni si procede nel seguente modo:

- si risolve separatamente ciascuna disequazione del sistema, trovando l'insieme delle soluzioni di ognuna di essa;
- la soluzione, se esiste, è data dall'insieme intersezione delle soluzioni delle singole disequazioni.

Poligono (convesso)

Definition 14. figura limitata ottenuta come intersezione di un numero finito di semipiani chiusi (cioè che contengono la retta che li genera come può essere per esempio $3x - 2y \leq 3$)

I vertici del poligono si possono determinare intersecando a due a due le rette che generano i semipiani.

Poliedro (convesso)

Definition 15. *figura limitata ottenuta come intersezione di un numero finito di semispazi chiusi (come può essere per esempio $3x - 2y + 2z \leq 3$)*

Gli spigoli del poliedro si possono determinare intersecando a due a due i piani che generano i semispazi. I vertici del poligono si possono determinare intersecando a tre a tre i piani che generano i semispazi.

Geometria analitica dello spazio

- Se ci troviamo su una retta su cui abbiamo fissato un punto origine ed un'unità di misura per determinare un punto della retta basta assegnare alla coordinata un valore

l'equazione $2x-6=0$ determina un punto della retta reale ($x=3$)

- Se ci troviamo in un piano, in cui abbiamo definito un sistema di assi coordinati ortogonali, un'origine corrispondente al punto di intersezione delle due rette ed un'unità di misura, per determinare un punto bisogna assegnare una coppia ordinata di valori (x,y) , una retta è rappresentata da

l'equazione $2x+3y-6=0$ rappresenta una retta, insieme di punti (x,y) che soddisfano all'equazione data.

l'intersezione di due rette rappresenta un punto.

una qualunque funzione $y = f(x)$ viene rappresentata graficamente mediante le coppie di punti (x, y) che soddisfano la precedente equazione, ove f è una funzione di una sola variabile

- Se ci troviamo in uno spazio, in cui abbiamo definito un sistema di assi coordinati ortogonali (tre rette a due a due perpendicolari ed intersecantesi nel punto definito come origine degli assi) ed un'unità di misura, per determinare un punto bisogna assegnare una terna ordinata di valori (x,y,z) , un piano è rappresentato da

$2x+3y+2z-6=0$, luogo geometrico dei punti che soddisfa l'equazione

l'intersezione di due piani rappresenta una retta, mentre per determinare un punto devo intersecare tre piani.

analogie tra retta, piano, spazio

$x=0$

- è un punto della retta reale
- rappresenta una retta, l'asse delle y , nel piano cartesiano (insieme di punti (x, y) del piano in cui la prima coordinata assume il valore 0: $(0, y)$)
- rappresenta un piano, il piano Oyz , nello spazio tridimensionale (insieme di punti (x, y, z) dello spazio in cui la prima coordinata assume il valore 0: $(0, y, z)$)

$x=k$

- è un punto della retta reale, a distanza k dall'origine
- rappresenta una retta, parallela all'asse delle y , nel piano cartesiano (insieme di punti (x, y) del piano in cui la prima coordinata assume il valore k : (k, y))

- rappresenta un piano, parallelo al piano Oyz, nello spazio tridimensionale (insieme di punti (x, y, z) dello spazio in cui la prima coordinata assume il valore k : (k, y, z))

Funzione reale di due variabili reali

Definition 16. si dice *funzione reale di due variabili reali* una relazione, di natura qualsiasi, che associa ad ogni coppia di numeri reali (x, y) uno ed un solo numero reale $z=f(x, y)$, cioè:

$$(x, y) \in A \subseteq \mathbb{R}^2; z \in \mathbb{R}; f: (x, y) \rightarrow z$$

la rappresentazione grafica di una tale funzione è una superficie.

linee di livello

La linea di livello è la proiezione ortogonale sul piano Oxy dell'insieme I di punti di una superficie che hanno tutti la stessa altezza rispetto al piano Oxy.

Example 17. l'equazione $3x + 8y - z - 24 = 0$ rappresenta un piano dello spazio tridimensionale. Essa può essere scritta come $z = 3x + 8y - 24$. Intersecando tale piano con piani paralleli al piano Oxy di equazione $z = k$

$$\begin{cases} z = 3x + 8y - 24 \\ z = k \end{cases}$$

otteniamo l'equazione $3x+8y-24-k=0$ che rappresenta una retta nel piano cartesiano Oxy; questa è la proiezione dell'intersezione tra i due piano appunto sul piano Oxy