

Capitolo 2

Nozioni base di teoria dei grafi

2.1 Prime definizioni

La teoria dei grafi studia le proprietà metriche e topologiche delle relazioni binarie. L'oggetto della teoria è il cosiddetto *grafo*, ovvero una coppia di insiemi (N, A) , ove $N = \{v_1, \dots, v_n\}$ è un insieme finito di elementi detti *nodi* mentre $A = \{e_1, \dots, e_m\} \subseteq N \times N$ è un sottoinsieme di coppie ordinate di nodi dette *archi*. La rappresentazione grafica di un grafo orientato è data in Fig. 2.1, ove $N = \{v_1, \dots, v_6\}$, mentre $A = \{e_1, \dots, e_9\}$. I nodi sono rappresentati con cerchi mentre gli archi sono frecce che partono dal primo nodo della coppia e terminano nel secondo nodo.

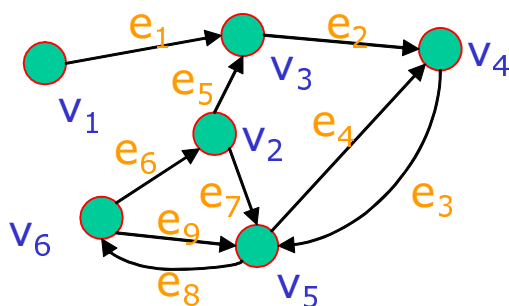


Figura 2.1: Grafo orientato

Di seguito considereremo solo *grafi semplici* ovvero grafi privi di *loop* (archi di tipo (u, u) per qualche $u \in N$), e di archi paralleli (coppie di archi uguali), come illustrato in Fig. 2.2.

Quindi, i grafi considerati conterranno al più un arco per ogni coppia di nodi e i nodi dell'arco devono essere distinti. I grafi fin qui introdotti sono i cosiddetti *grafi orientati*. Un'altra famiglia rilevante è quella dei *grafi non orientati*, ove l'insieme di archi A è un insieme di coppie non ordinate.

Per ogni arco orientato $(v_i, v_k) \equiv v_i v_k \equiv e$ diremo

- v_i coda di e , v_i precede v_k , e esce da v_i .
- v_k testa di e , v_k segue v_i , e entra in v_k .

Per ogni arco orientato o non orientato $(v_i, v_k) \equiv e$ diremo

- v_i adiacente a v_k .
- e incidente su v_k e v_i

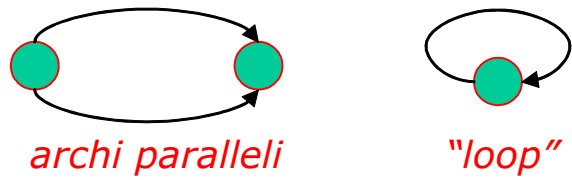


Figura 2.2: Loop e archi paralleli

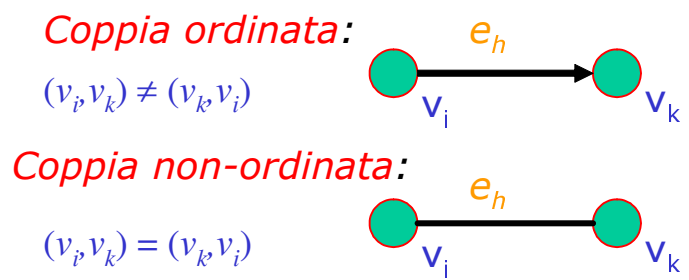


Figura 2.3: Arco orientato e arco non orientato

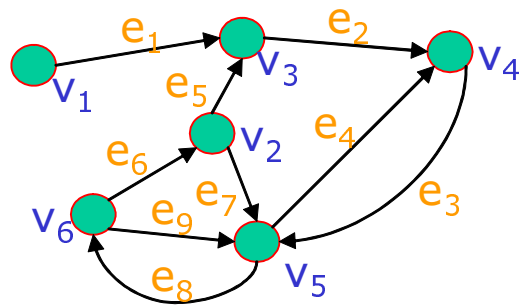


Figura 2.4: Esempio di grafo orientato

- v_i e v_k estremi di e .

In figura $v_1v_3 \equiv e_1$, v_1 è coda di e_1 , v_3 è testa di e_1 , v_1 precede v_3 , v_5 segue v_2 , e_2 esce da v_3 , e_3 entra in v_5 , v_5 è adiacente a v_2 , e_3 è incidente su v_4 . Diremo *grafo orientato* un grafo in cui ogni arco è orientato (grafo di Fig. 2.4), *grafo non orientato* un grafo in cui ogni arco è non orientato, altrimenti il grafo è detto *grafo misto*.

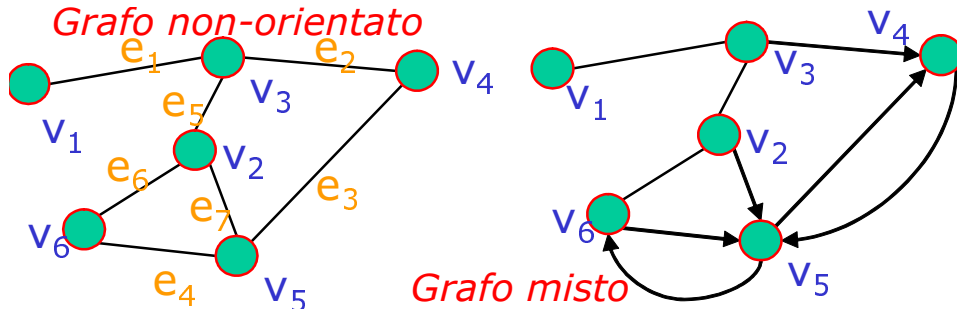


Figura 2.5: Grafo non orientato e grafo misto

Diremo *stella* di v in G , l'insieme $\delta_G(v) = \{e \in A : e = uv \text{ o } e = vu\}$, ovvero l'insieme degli archi di G incidenti in v . In Figura 2.4, $\delta_G(v_2) = \{e_5, e_6, e_7\}$, mentre in Figura 2.5, $\delta_G(v_3) = \{e_1, e_2, e_5\}$. La cardinalità $|\delta_G(v)|$ della stella di v è detta *grado* di v ; il grado di v in G è indicato con $d_G(v)$. Chiameremo infine *intorno* di v l'insieme $N_G(v) = \{u \in N : uv \in A \text{ o } vu \in A\}$ dei nodi adiacenti a v in G . Queste ultime definizioni si applicano a grafi di ogni tipo; se il grafo è un grafo orientato, possiamo estendere le definizioni nel modo seguente. Diremo *stella uscente* da v l'insieme $\delta_G^+(v) = \{e : v \text{ è coda di } e\}$ (e diremo $|\delta_G^+(v)|$ il *grado uscente* di v). In Figura 2.4, $\delta_G^+(v_2) = \{e_5, e_7\}$. Analogamente, diremo *stella entrante* in v l'insieme $\delta_G^-(v) = \{e : v \text{ è testa di } e\}$ (e diremo $|\delta_G^-(v)|$ il *grado entrante* di v). In Figura 2.4, $\delta_G^-(v_2) = \{e_6\}$. Infine chiameremo *intorno positivo* di v l'insieme $N_G^+(v) = \{u \in N : vu \in A\}$ ossia l'insieme dei nodi che sono teste di archi la cui coda è v . Chiameremo *intorno negativo* di v l'insieme $N_G^-(v) = \{u \in N : uv \in A\}$, ossia l'insieme dei nodi che sono code di archi la cui testa è v .

Sia dato un insieme di nodi $S \subseteq N$. Chiameremo *taglio* in $G(N, A)$ definito da S , l'insieme di archi $\delta_G(S) = \{uv : u \in S, v \in N - S\}$, ovvero l'insieme di archi con un estremo in S e l'altro estremo in $N - S$.

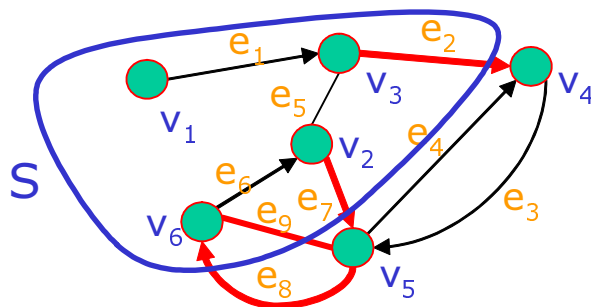


Figura 2.6: Taglio

In Figura 2.6, si ha $S = \{v_1, v_2, v_3, v_6\}$ mentre $\delta_G(S) = \{e_2, e_7, e_8, e_9\}$. Dati $S, T \subseteq N$ due insiemi di nodi disgiunti ($S \cap T = \emptyset$), indicheremo con $\delta_G(S, T)$ l'insieme degli archi con un estremo in S e

l'altro estremo in T , e cioè l'insieme $\delta_G(S) \cap \delta_G(T)$. In Figura 2.7 si ha $S = \{v_3, v_4\}$, $T = \{v_2, v_5\}$, $\delta_G(S, T) = \{e_3, e_4, e_5\}$.

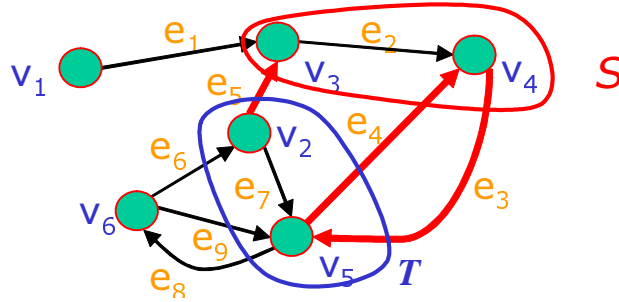


Figura 2.7: $\delta(S, T)$

Sia $G(N, A)$ un grafo orientato e sia $S \subseteq N$. Chiameremo *taglio uscente* da S in $G(N, A)$, l'insieme di archi $\delta_G^+(S) = \{uv : u \in S, v \in N - S\}$, ovvero l'insieme di archi orientati con coda in S e testa in $N - S$. Chiameremo *taglio entrante* in S in $G(N, A)$, l'insieme di archi $\delta_G^-(S) = \{uv : u \in N - S, v \in S\}$, ovvero l'insieme di archi orientati con coda in $N - S$ e testa in S .

Un grafo $H(N', A')$ è detto *sottografo* di un grafo $G(N, A)$ se $N' \subseteq N$ e $A' \subseteq A$.

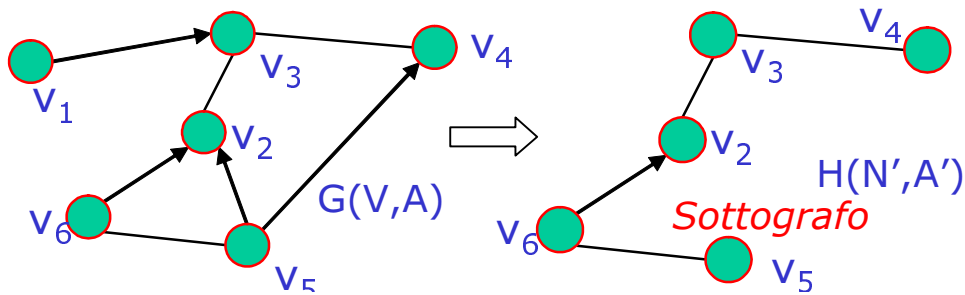


Figura 2.8: Un grafo G e un suo sottografo

H è detto *ricoprente* se $N' = N$ (H "ricopre" i nodi di G), mentre è detto *indotto* se $A' = \{uv : \{u, v\} \subseteq N', uv \in A\}$: più precisamente, H è detto "indotto" in G dall'insieme di nodi N' (e si indica con $H = G[N']$), in quanto N' definisce completamente il sottografo H .

2.2 Cammini, Walk, trail, cicli.

Un *walk* in $G(N, A)$ è una sequenza alternante di nodi e archi $W = (v_{i_0}, e_{i_1}, v_{i_1}, e_{i_2}, v_{i_2}, \dots, v_{i_{p-1}}, e_{i_p}, v_{i_p})$, ove, per $j = 1, \dots, p$, l'arco e_{i_j} è incidente nei nodi $v_{i_{j-1}}$ e v_{i_j} (ovvero $e_{i_j} = (v_{i_{j-1}}, v_{i_j})$ oppure $e_{i_j} = (v_{i_j}, v_{i_{j-1}})$). Indicheremo con $V(W) = \{v_{i_0}, \dots, v_{i_p}\}$ l'insieme dei nodi di W , mentre con $A(W) = \{e_{i_1}, \dots, e_{i_p}\}$ l'insieme degli archi di W . I nodi v_{i_0} e v_{i_p} sono detti *nodi estremi* del walk W mentre gli altri nodi $\{v_{i_1}, \dots, v_{i_{p-1}}\}$ sono detti *nodi intermedi*. Si noti che nodi e archi possono essere ripetuti. Se $v_{i_0} = v_{i_p}$ (cioè i due estremi coincidono) il walk è detto *chiuso*, altrimenti è detto *aperto*. Un walk senza archi ripetuti è detto *trail*.

Un walk senza nodi **interni** ripetuti è detto *cammino*. In sostanza, se un nodo appare due volte in un cammino, tale nodo può solo coincidere con i nodi estremi del cammino stesso che è quindi un cammino chiuso. Un cammino chiuso è detto *ciclo*.

Dati due cammini $W^1 = (v_{i_0}, \dots, v_{i_p})$ e $W^2 = (v_{j_0}, \dots, v_{j_q})$ tali che $v_{i_p} = v_{j_0}$ (cioè W^1 e W^2 hanno un estremo comune), definiamo *concatenazione* di W^1 e W^2 il cammino $W^1 \bullet W^2 = (v_{i_0}, \dots, v_{i_p}, \dots, v_{j_q})$.

Un *cammino orientato* è un cammino $W = (v_{i_0}, (v_{i_0}, v_{i_1}), v_{i_1}, (v_{i_1}, v_{i_2}), \dots, (v_{i_{p-1}}, v_{i_p}), v_{i_p})$ in cui ogni arco è un arco orientato: quindi per ogni coppia di nodi consecutivi sul cammino $v_{i_{k-1}}$ e v_{i_k} , $k \in \{1, \dots, p\}$, si ha che il corrispondente arco è orientato da $v_{i_{k-1}}$ a v_{i_k} . Un cammino orientato chiuso è detto *ciclo orientato*.

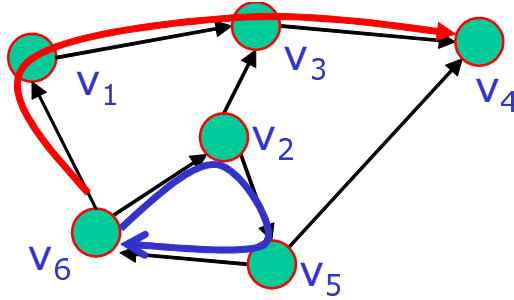


Figura 2.12: Cammino orientato e Ciclo orientato

2.3 Connessione.

Un nodo $u \in N$ è detto *connesso* a un nodo $v \in N$ in G se esiste un cammino di estremi u e v .

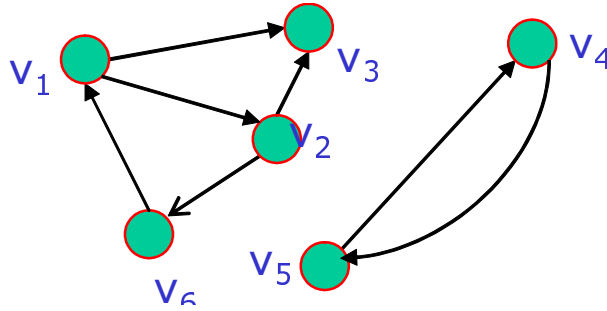


Figura 2.13: Esempi di connessione

Nel grafo di Figura 2.13, in cui $N = \{v_1, \dots, v_6\}$, si ha che v_1 è connesso a v_2 , v_3 è connesso a v_6 , v_4 è connesso a v_5 , v_3 non è connesso a v_4 . Se indichiamo con \mathcal{R} la relazione "essere connesso a", si vede facilmente che \mathcal{R} è una relazione di equivalenza. Infatti, gode della proprietà transitiva (se $u\mathcal{R}v$ e $v\mathcal{R}t$ allora $u\mathcal{R}t$) (vedi figura 2.14 ove i tratti di curva tra i nodi rappresentano cammini), della proprietà riflessiva ($u\mathcal{R}u$) e della proprietà simmetrica (se $u\mathcal{R}v$ allora $v\mathcal{R}u$).

La relazione di equivalenza "essere connesso a" partiziona l'insieme dei nodi N in un certo numero di classi d'equivalenza C_1, \dots, C_t (partizione: $C_1 \cup C_2 \cup \dots, \cup C_t = N$, $C_i \cap C_j = \emptyset$ per ogni $1 \leq i < j \leq t$). Coppie di nodi sono connesse se e solo se appartengono alla stessa classe d'equivalenza. Si consideri il grafo di Figura 2.13. In questo esempio, si hanno le due classi d'equivalenza $C_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_6\}$ e $C_2 = \{v_4, v_5\}$. Il sottografo $G[C]$ indotto dalla classe C è detto *componente connessa* di G . Il numero di

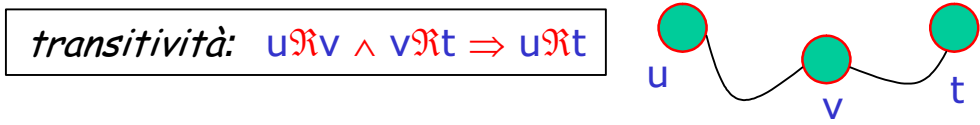


Figura 2.14: Proprietà transitiva

componenti connesse di un grafo G è indicato con $c(G)$. Il grafo di Figura 2.13 si compone quindi di due componenti connesse:

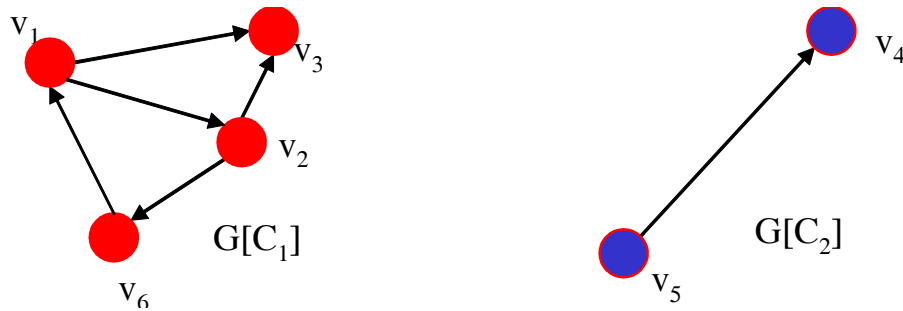


Figura 2.15: Componenti Connesse del grafo di Figura 2.13

Se $c(G) = 1$ il grafo è detto *connesso*. Altrimenti ($c(G) > 1$) è detto *non-connesso*

Connessione forte Il concetto di connessione può essere opportunamente esteso al caso di grafi orientati. Specificamente, un nodo u è connesso a un nodo v (e scriveremo $u\mathcal{R}v$) se esiste un cammino orientato da u a v . Tuttavia, questa definizione non è particolarmente utile a causa della mancanza di simmetria: l'esistenza di un cammino orientato da u a v non assicura l'esistenza di un cammino orientato da v a u . Per questo motivo si introduce una definizione più forte: un nodo $u \in N$ è detto *fortemente connesso* a un nodo $v \in N$ in G (indicato con $u\mathcal{R}^Fv$) se esiste un cammino orientato che va da u a v e un cammino orientato che va da v a u .



Figura 2.16: Proprietà della relazione di connessione forte

E' facile vedere che la relazione di connessione forte è una relazione d'equivalenza. Ovviamente la

relazione è riflessiva; la transitività e la simmetria sono illustrate in 2.16.

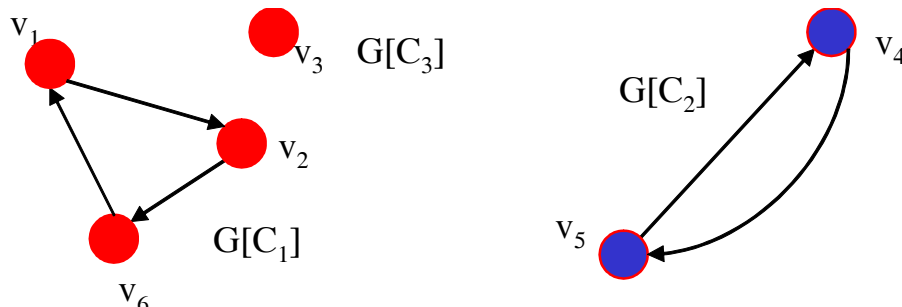


Figura 2.17: Componenti Fortemente Connesse del grafo di Figura 2.13

Anche in questo caso, la relazione definisce una partizione dell'insieme dei nodi in classi di equivalenza C_1, \dots, C_t . I sottografi indotti dalle classi d'equivalenza $G[C_1], \dots, G[C_t]$ sono detti *componenti fortemente connesse* di G . In Figura 2.17 sono mostrate le classi d'equivalenza associate al grafo di Figura 2.14.

2.4 Foreste, alberi.

Un grafo senza cicli (*grafo aciclico*) è detto *foresta*. In Figura 2.18 è mostrata una foresta con tre

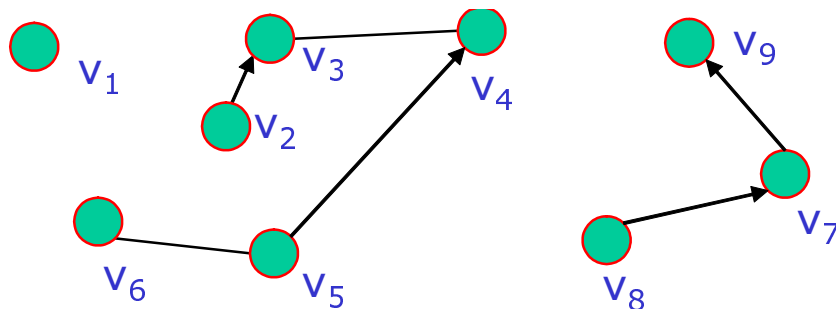


Figura 2.18: Foresta

componenti connesse, indotte dagli insiemi di nodi $C_1 = \{v_1\}$, $C_2 = \{v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ e $C_3 = \{v_7, v_8, v_9\}$. Una foresta connessa (ovvero con una singola componente connessa) è detta *albero*. Quindi, un albero è un grafo aciclico e connesso.

Verranno ora discusse alcune proprietà fondamentali degli alberi e delle foreste.

Teorema 2.4.1 (Teorema del cammino singolo) *Se $G(N, A)$ è un albero allora per ogni coppia di nodi $u, v \in N$ esiste uno e un solo cammino che connette u a v .*

Dim. L'esistenza di almeno un cammino fra ogni coppia di nodi segue direttamente dalla definizione di albero, che è un grafo connesso. Supponiamo per assurdo che esistono due cammini distinti in G , rispettivamente P_1 e P_2 , che connettono due nodi distinti $u \in N$ e $v \in N$. Sia ty il primo arco di P_1 che non appartiene a P_2 (tale arco deve esistere perché $P_1 \neq P_2$). Chiaramente $t \in P_2$. Se $y \in P_2$ allora, chiamando con P_2^{ty} il sottocammino di P_2 che connette t ad y , si ha che P_2^{ty} concatenato all'arco ty forma un ciclo, contraddizione. Se $y \notin P_2$ allora sia w in primo nodo di P_1 successivo a t appartenente a P_2 (tale nodo esiste perché $v \in P_1 \cap P_2$). Sia P_1^{tw} il sottocammino di P_1 che va da t a w . Analogamente,

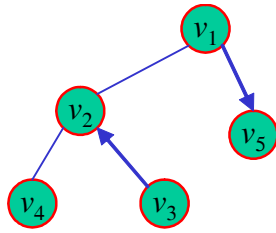


Figura 2.19: Albero

sia P_2^{tw} il sottocammino di P_2 che va da t a w . E' facile vedere che P_1^{tw} e P_2^{tw} hanno in comune solo gli estremi t e w e la loro unione forma un ciclo contenuto in G , contraddizione.

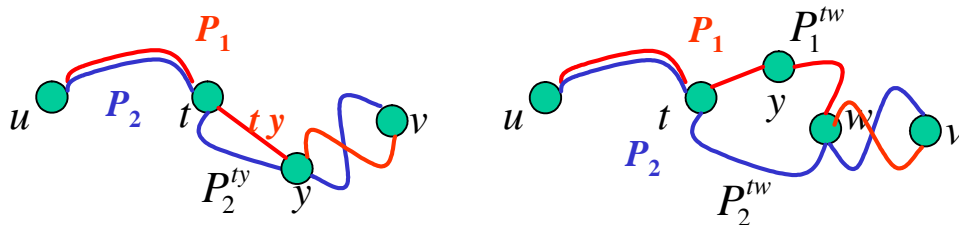


Figura 2.20: Albero e ciclo generato da due cammini distinti nella dimostrazione del teorema 2.4.1

Dato un albero, diremo *foglia* un nodo di grado unitario.

Teorema 2.4.2 (Teorema delle due foglie) *Ogni albero $H(N,T)$, con $|N| \geq 2$, contiene almeno due foglie. Inoltre, se H contiene esattamente due foglie, allora H è un cammino.*

Dim. Come si è visto, ogni coppia di nodi $x, y \in N$ è connessa in T da un unico cammino. Si prenda una coppia u, v per cui il cammino P che connette u and v sia il cammino più lungo, cioè un cammino di H che contiene il massimo numero di archi possibile.

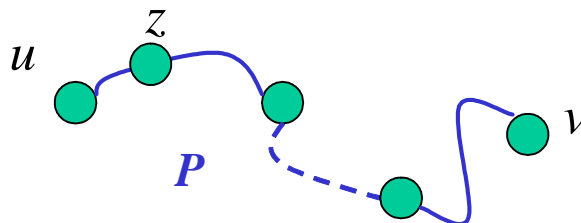


Figura 2.21: Il cammino P nella dimostrazione del Teorema 2.4.2

Allora u and v sono foglie di H . Infatti, supponiamo per assurdo che u non sia una foglia; quindi $d_H(u) \geq 2$ e in u incidono almeno due archi distinti. Essendo u estremo di P , vi inciderà un solo arco di P , sia uz . Essendo $d(u) \geq 2$, esiste almeno un arco uw incidente in u tale che $uw \notin P$. Se $w \in P$, il sottocammino di P che connette u e w concatenato all'arco uw formano un ciclo, contraddizione. Se $w \notin P$, il cammino $P \bullet (u, w)$ che connette w e y è un cammino che contiene più archi di P , contraddizione. Abbiamo quindi dimostrato che ogni albero con almeno due nodi contiene almeno due foglie.

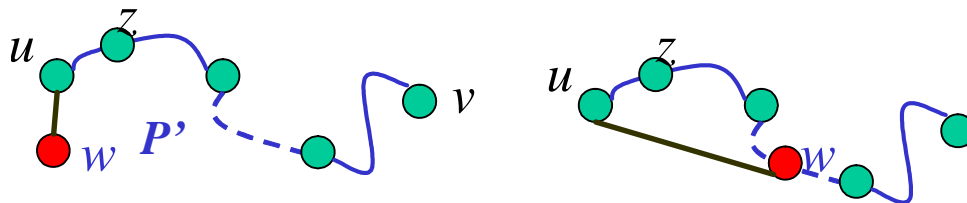


Figura 2.22: Contraddizione nel Teorema 2.4.2

Mostriamo ora la seconda parte del teorema. Supponiamo quindi che l'albero H contenga esattamente 2 foglie x e y e sia P il cammino che le connette in H . Mostriamo che $H \equiv P$. Supponiamo quindi per assurdo che esista almeno un nodo di H che non appartiene a P . Fra tutti i nodi di H che non appartengono a P si scelga un nodo w tale che il cammino P_{wx} che lo connette a x in H sia il più lungo possibile. Usando lo stesso argomento della prima parte della dimostrazione, si dimostra che w è una foglia. Ma w non appartiene a P e H contiene (almeno) tre foglie, contraddizione. \square

Teorema 2.4.3 (Teorema del numero di archi di un albero) *Il numero di archi $|T|$ di un albero $H(N, T)$ è pari a $|N| - 1$.*

Dim. Per induzione. Se l'albero contiene un solo nodo, allora non contiene archi e quindi $|T| = 0 = 1 - 1 = |N| - 1$. Supponiamo ora che il teorema vale per $|N| = k$, per qualche $k \geq 1$; mostriamo che vale ancora per $|N| = k + 1$. Sia quindi $H(T, N)$ un albero con $|N| = k + 1$ e sia u una foglia di H . Costruiamo un nuovo grafo, $H'(N', T')$, ottenuto da H rimuovendo la foglia u e l'unico arco incidente in u . Quindi, $|N'| = |N| - 1$ e $|T'| = |T| - 1$.

Mostriamo che H' è un albero. Infatti, H' è aciclico perché ottenuto rimuovendo un nodo e un arco da un grafo aciclico. Mostriamo ora che H' è connesso. Supponiamo di no: esistono quindi due nodi w e z di H' , connessi in H da un cammino P (unico) ma non connessi in H' . Questo vuol dire che il nodo u appartiene a P . Tuttavia $u \neq w, z$ implica che u non è estremo del cammino P , e quindi in u incidono due archi distinti di P , contraddicendo l'ipotesi che u sia una foglia.

Quindi H' è un grafo connesso e aciclico, e cioè un albero. Per l'ipotesi induttiva, $|T'| = |N'| - 1$. Ma allora $|T| = |T'| + 1 = |N'| = |N| - 1$ e l'enunciato è dimostrato. \square

COROLLARIO 2.4.1 (Corollario del numero di archi di una foresta) *Il numero di archi $|T|$ di una foresta $H(N, T)$ con k componenti connesse ($k \geq 1$) è pari a $|N| - k$.*

Dim. Siano N_1, \dots, N_k gli insiemi di nodi disgiunti che inducono le k componenti connesse, che indichiamo con $H_1(N_1, T_1), \dots, H_k(N_k, T_k)$. Chiaramente si ha $|N_1| + \dots + |N_k| = |N|$. Ogni componente connessa di H è un albero. Quindi, applicando il teorema 2.4.3 si ha $|T_i| = |N_i| - 1$ per $i = 1, \dots, k$ e quindi $|T_1| + |T_2| + \dots + |T_k| = |N_1| - 1 + |N_2| - 1 + \dots + |N_k| - 1 = |N_1| + \dots + |N_k| - k = |N| - k$. \square

La prossima figura (2.23) illustra un esempio del teorema, mostrando una foresta con 10 nodi, 3 componenti connesse e $10-3=7$ archi.

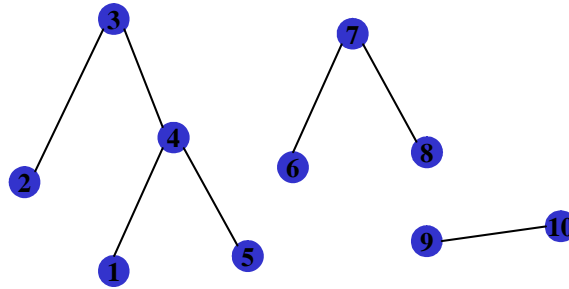


Figura 2.23: Una foresta con 10 nodi, 3 componenti connesse e $10-3=7$ archi.

Teorema 2.4.4 (Teorema della foresta ricoprente) *Sia $G(N, A)$ un grafo e sia $H(S, T)$ un sottografo aciclico di G tale che $|T| = |N| - 1$. Allora $S = N$ (la foresta è ricoprente) e H è un albero.*

Dim. Supponiamo che H contenga k componenti connesse, e siano S_1, \dots, S_k gli insiemi di nodi disgiunti che inducono le k componenti connesse, che indichiamo con $H_1(S_1, T_1), \dots, H_k(S_k, T_k)$. Per il Corollario 2.4.1 si ha $|T| = |S| - k$. Ora, per ipotesi $|T| = |N| - 1$ e quindi $|S| - k = |N| - 1$. Affinchè valga quest'ultima relazione deve necessariamente essere $|S| = |N|$ e $k = 1$. Infatti, se $|S| < |N|$ oppure $k > 1$ la quantità $|S| - k$ avrà un valore strettamente inferiore a $|N| - 1$. Quindi $S = N$ e la foresta è ricoprente; inoltre $k = 1$ e la foresta contiene una sola componente connessa e quindi H è un albero. \square

Un grafo privo di cicli orientati è detto *DAG* (dall'inglese *directed acyclic graph*).

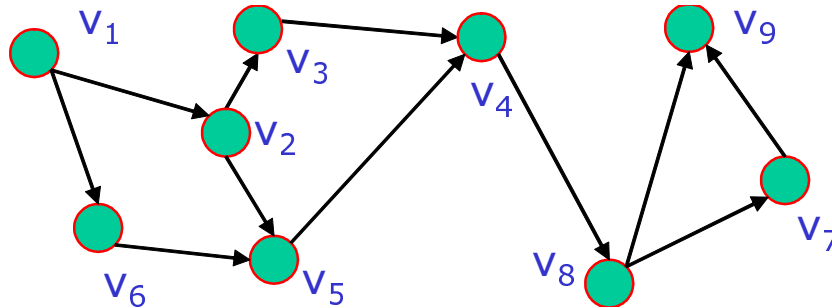


Figura 2.24: Directed Acyclic Graph

Si osservi che un DAG pur non contenendo cicli *orientati*, può contenere cicli.

2.5 Esercizi di autovalutazione

Esercizio 2.5.1 Vero o Falso? *Rimuovendo un taglio da un grafo connesso si ottiene un grafo con due componenti connesse. Il motivo?*

Soluz. Il teorema è falso. Si consideri l'esempio in Figura 2.25. Se $S = \{v_1, v_3, v_5\}$ gli archi del taglio saranno $\delta_G(S) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5\}$ ovvero tutti gli archi del grafo. Il grafo ottenuto rimuovendo gli archi del taglio non contiene archi ovvero contiene tutti nodi *isolati* (senza archi incidenti) e quindi le componenti connesse sono 5.

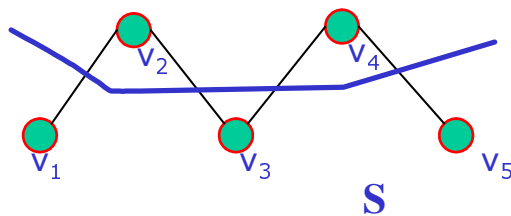


Figura 2.25:

Esercizio 2.5.2 *Quanti archi può possedere, al massimo, un grafo con 5 nodi.*

Soluz. Consideriamo un grafo orientato con n nodi. Da ogni nodo può uscire un arco verso ogni altro nodo, quindi la stella uscente di un nodo ha cardinalità (al massimo) pari a $n - 1$. Quindi, in tutto gli archi saranno $n(n - 1)$. Se il grafo è non orientato, l'arco uv e l'arco vu coincidono, e quindi abbiamo esattamente la metà del massimo numero di archi di un grafo orientato, ovvero $n(n - 1)/2$. In Figura 2.26 è mostrato un grafo completo con 5 nodi, orientato e non orientato. In base al risultato sopra esposto, il grafo orientato contiene $5 \times 4 = 20$ archi mentre quello non orientato ne contiene 10. Un grafo completo è detto *clique*.

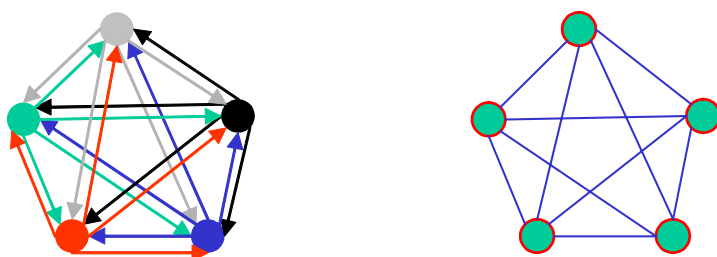


Figura 2.26: Clique con cinque nodi

Esercizio 2.5.3 Completare la definizione seguente: *Albero Ricoprente di $G(N, A)$: un sottografo di $G(N, A)$...*

Esercizio 2.5.4 *Dimostrare che ogni DAG $G(N, A)$ contiene un nodo con stella uscente vuota (detto pozzo).*

Soluz. Sia $P = \{u = v_{j_1}, (v_{j_1}, v_{j_2}), v_{j_2}, \dots, (v_{j_{p-1}}, v_{j_p}), v_{j_p} = z\}$ il cammino orientato più lungo in G , di estremi u e z . Mostriamo che z è un pozzo. Altrimenti esiste un arco $zw \in A$. Se w non è un nodo di P , allora il cammino $P' = P \bullet \{z, (zw), w\}$, ottenuto concatenando P e l'arco zw è un cammino orientato più lungo di P , contraddizione. Altrimenti $w \in P$. Sia $w = v_{j_k}$. Ma allora, il cammino $P' = P \bullet \{z, (zw), w\} = \{v_{j_k}, (v_{j_k}, v_{j_{k+1}}), v_{j_{k+1}}, \dots, (v_{j_{p-1}}, v_{j_p}), v_{j_p} = z, (zw), w = v_{j_k}\}$ è un ciclo orientato, contraddicendo l'ipotesi che G sia un DAG.

Si osservi che in modo del tutto analogo si può dimostrare che u non ha archi entranti, ovvero u è una *sorgente*. \square

Esercizio 2.5.5 *Dimostrare che in un grafo $G(N, A)$ la somma dei gradi dei nodi è pari al doppio del numero degli archi*

Soluz. Dimostriamo per induzione. Il teorema è vero se $|N| = 1$. Infatti $d_G(v) = 0 = 2|A|$. Supponiamo che il teorema sia vero per $|N| = k$. Mostriamo che è vero per $|N| = k + 1$. Sia quindi $G(N, A)$ un grafo con $k + 1$ nodi. Scegliamo un nodo qualsiasi u e costruiamo il grafo $H(N', A') = G[N - \{u\}]$, cioè ottenuto eliminando u da G e tutti gli archi incidenti in u . Il teorema vale per H e quindi $\sum_{v \in N'} d_H(v) = 2|A'|$. Si osservi che per ogni nodo $v \in N'$ adiacente a u in G si ha che $d_H(v) = d_G(v) - 1$, mentre per i nodi z non adiacenti a u in G si ha $d_H(z) = d_G(z)$. Quindi $\sum_{v \in N'} d_H(v) = \sum_{v \in N'} d_G(v) - d_G(u)$. Si osservi inoltre che $A' = A - \delta_G(u)$ e $|A'| = |A| - d_G(u)$. Sostituendo in $\sum_{v \in N'} d_H(v) = 2|A'|$ otteniamo $\sum_{v \in N'} d_G(v) - d_G(u) = 2(|A| - d_G(u))$ ovvero $\sum_{v \in N'} d_G(v) + d_G(u) = 2|A|$ e quindi $\sum_{v \in N} d_G(v) = 2|A|$. \square