

Carlo Casolo

Appunti di

**TEORIA
DEI
GRAFI**

per l'insegnamento di
TEORIA DEI GRAFI E APPLICAZIONI
per il corso di laurea triennale in Matematica

Vers. 1.0

Anno Accademico 2004-2005

AVVERTENZA

Tutti i diritti di questa pubblicazione sono dell'autore.

È consentita la riproduzione integrale di questa pubblicazione a titolo gratuito.

È altresì consentita a titolo gratuito l'utilizzazione di parti di questa pubblicazione in altra opera all'inderogabile condizione che ne venga citata la provenienza e che della nuova opera nella sua interezza vengano consentite la riproduzione integrale a titolo gratuito e l'utilizzazione di parti a queste stesse condizioni.

L'uso di questa pubblicazione in qualsiasi forma comporta l'accettazione integrale e senza riserve di quanto sopra.

GRAFI

1 Primi elementi

Un grafo è una coppia $\Gamma = (V, E)$, dove V è un insieme non vuoto, detto insieme dei **vertici** di Γ , ed E è un sottoinsieme (che può anche essere vuoto) dell'insieme dei sottoinsiemi di ordine 2 di V . Ovvero, $E \subseteq \{\{v, w\} \mid v, w \in V \ v \neq w\}$. Gli elementi di E sono detti i **lati** di Γ .

Un grafo è *finito* se l'insieme dei suoi vertici è finito (chiaramente in tal caso anche l'insieme dei lati è finito). A meno che non venga esplicitamente detto il contrario, tutti i grafi che considereremo nel seguito saranno intesi essere finiti.

In generale si è soliti rappresentare uno specifico grafo mediante un diagramma, nel quale i vertici sono punti in un piano, ed ogni lato è rappresentato da una linea (non necessariamente un segmento di retta) che congiunge i due punti che corrispondono ai vertici appartenenti al lato in questione.

Ad esempio, sia $X = \{1, 2, 3\}$, e sia Γ il grafico i cui vertici sono i sottoinsiemi di X , e due di essi costituiscono un lato se la loro differenza simmetrica contiene almeno due elementi. Allora, Γ si può rappresentare mediante il seguente diagramma:

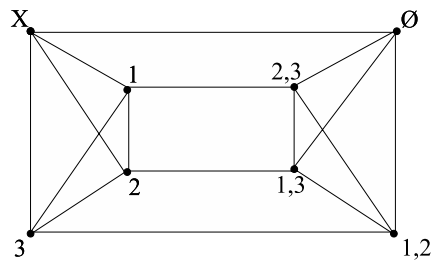


Figura 1.1: un grafo.

In questo senso la nozione di grafo si presta alla più svariate utilizzazioni; talvolta costituendo semplicemente un modo comodo e compatto per descrivere relazioni (ad esempio, il grafo della Figura 1.2 è il diagramma della molecola di etanolo, la cui formula chimica è H_6C_2O), ma spesso (come vedremo) risultando non solo uno schema visivo, ma il naturale strumento matematico per rendere accessibile lo studio di determinati problemi.

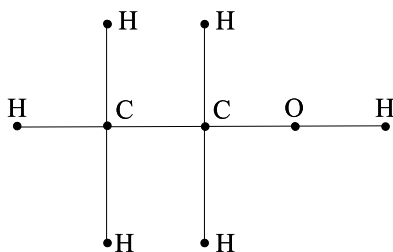


Figura 1.2: la molecola dell'etanolo.

La nozione di grafo che abbiamo dato e della quale ci occuperemo in prevalenza (se occorrerà distinguerla da altre la richiameremo come quella di 'grafo semplice'), è infatti la più semplice, ed è anche quella più studiata, ma può essere ampliata in diversi modi naturali, che possono adattarsi meglio a schematizzare particolari fenomeni o problemi. Ad esempio, per rimanere nella chimica, sappiamo che i legami tra gli atomi di una molecola non sono sempre tutti "semplici", come nel caso dell'etanolo, ma che vi possono essere anche legami multipli, come (per fare un esempio specifico) nella molecola dell'adenina (uno degli aminoacidi di base degli acidi nucleici), la cui formula chimica è $H_2C_5N_5$.

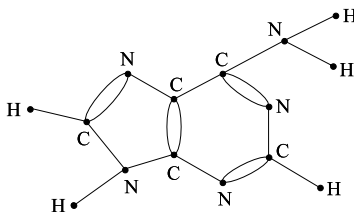


Figura 1.3: la molecola dell'adenina.

Viene quindi opportuno il considerare anche quei 'grafi', detti *multigrafi*, in cui tra la stessa coppia di vertici possono trovarsi diversi lati. Un multigrafo è quindi formato da un insieme non vuoto V di vertici, da un insieme E di lati, e da una funzione che associa ad ogni elemento di E una coppia (non ordinata) di elementi distinti di V (i suoi estremi). Se tale funzione è iniettiva, riotteniamo un grafo; dunque ogni grafo è un multigrafo, ma non viceversa. Oltre a ciò, è anche possibile che si debba prevedere l'eventualità che alcuni lati inizino e terminino nello stesso vertice (in tal caso sono detti *cappi*); seguendo il testo di Hartsfield e Ringel, *Pearls in Graph Theory*, chiamiamo *pseudografi* i multigrafi in cui sono ammessi i cappi. Un esempio di pseudografo è quello della Figura 1.4.

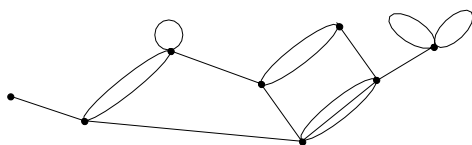


Figura 1.4: uno pseudografo.

Un'altra maniera di estendere il concetto di grafo è quella di assegnare ad ogni lato una "direzione", che nel diagramma viene di solito rappresentata mediante una freccia (come ad esempio negli alberi genealogici, nei diagrammi che descrivono flussi, o in schemi di reti di distribuzione di varia natura). In tal caso, si parla di *grafi con direzione* (i cui lati sono detti *archi*): oggetti che hanno importanti applicazioni, e dei quali ci occuperemo in uno dei capitoli di queste note. Naturalmente, può anche poi essere necessario ricorrere a multigrafi o a pseudografi con direzione. Ad esempio, se V è l'insieme degli studiosi di un dipartimento di matematica (o anche di chimica), e si vuole rappresentare mediante un diagramma le citazioni incrociate da parte degli studiosi di V negli articoli di ricerca degli ultimi tre anni, dobbiamo ricorrere ad uno pseudografo con direzione, dato che è possibile che la studiosa a citi il/la collega b , ma che questi non citi mai la collega a (e dunque i lati hanno una direzione), è poi possibile che a citi b più di una volta (da cui i lati multipli), ed infine è possibile (ed anzi è del tutto frequente) che una/o studiosa/o citi se stessa/o (e più di una volta), da cui la necessità di utilizzare anche i cappi.

1.1 Vertici e lati.

Sia $\Gamma = (V, E)$ un grafo. Se $e = \{u, w\}$ è un lato di Γ , si dice che i vertici u e w sono gli *estremi* di e . Un vertice v ed un lato e si dicono *incidenti* se v è un estremo di e . Due vertici $v, w \in V$ si dicono **adiacenti** se $\{v, w\}$ è un lato (e quindi, in particolare, $v \neq w$); similmente, diremo che due lati $e, e' \in E$ sono *consecutivi* se hanno un estremo in comune (cioè se $e \neq e'$ ed $e \cap e' \neq \emptyset$). Dato $v \in V$, il **grado** (o *valenza*) di v è il numero di lati incidenti a v (nel caso di grafi semplici è anche il numero di vertici adiacenti a v), e si denota con $d_\Gamma(v)$. Un vertice che non sia incidente ad alcun lato (cioè tale che $d_\Gamma(v) = 0$) si dice vertice *isolato* di Γ . Il primo risultato generale della teoria dei grafi è una semplice ma fondamentale osservazione:

Teorema 1.1. *Sia $\Gamma = (V, E)$ un grafo. Allora*

$$\sum_{v \in V} d_\Gamma(v) = 2|E|.$$

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo l'insieme

$$S = \{(v, e) \in V \times E \mid v \in e\}.$$

Ora, ogni vertice $v \in V$ è incidente a tanti lati in E quanto è il suo grado; viceversa, ogni lato contiene esattamente due vertici. Si ha quindi, contando in due modi gli elementi dell'insieme S , facendo cioè separatamente variare prima la prima componente (i vertici), e quindi la seconda (i lati):

$$\sum_{v \in V} d_\Gamma(v) = |S| = 2|E|,$$

da cui l'enunciato. ■

Abbiamo definito il grado di un vertice, e dimostrato il Teorema nel caso dei grafi; ma entrambe le cose vanno bene (senza mutare una parola) anche nel caso dei multigrafi. Pertanto, è utile tenere presente che il Teorema 1.1 è un teorema sui multigrafi.

Ovviamente, un vertice di un grafo si dice un vertice (dis)pari se il suo grado è (dis)pari. poiché una somma di numeri interi è pari se e soltanto se il numero di addendi dispari è pari, dal teorema 1.1 discende subito il seguente

Corollario 1.2. *In un grafo il numero di vertici dispari è pari.*

Un grafo $\Gamma = (V, E)$ si dice **completo** se $E = \{\{v, w\} \mid v, w \in V, v \neq w\}$, ovvero se E contiene ogni possibile lato tra i vertici di V . Il grafo completo su n vertici lo denotiamo con K_n . In genere esso viene rappresentato a partire dai vertici di un n -agono regolare, congiunti in tutti i modi possibili; ad esempio

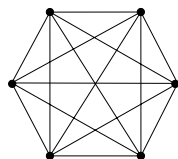


Figura 1.5: il grafo completo K_6 .

In un grafo completo su n vertici il numero dei lati è dunque uguale al numero di sottoinsiemi di ordine due dell'insieme dei vertici, e quindi è $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$. Il grafo in cui i lati sono tutti e soli quelli che costituiscono il perimetro del n -agono, si chiama *ciclo* di lunghezza n (o n -ciclo), e si denota con C_n . Ad esempio

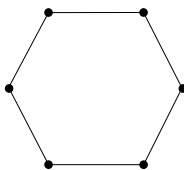


Figura 1.6: il ciclo C_6 .

(ovviamente, in questo caso, il numero di lati è uguale a quello dei vertici). Mentre si denota con P_n il grafo in cui gli $n + 1$ vertici possono essere disegnati di seguito in una linea, come, ad esempio, P_5



Un grafo si dice **regolare** se tutti i suoi vertici hanno lo stesso grado; se tale grado comune è d , si dice che il grafo è regolare d -valente. Il grafo completo K_n è regolare e $(n - 1)$ -valente (ed è il solo con tale proprietà su un dato insieme di n vertici); un n -ciclo è un grafo regolare 2-valente; mentre il grafo della Figura 1.1 è regolare 4-valente.

Famosi ed interessanti grafi regolari si ottengono considerando la relazione d'incidenza tra i vertici e gli spigoli dei poliedri regolari (i cosiddetti solidi platonici). La figura 1.7 mostra i grafi del tetraedro, del cubo (esaedro), dell'ottaedro, e del dodecaedro; si disegni per esercizio il grafo dell'icosaedro (20 facce triangolari, 12 vertici e 30 spigoli). Tra i grafi con un numero ridotto di vertici, uno dei più interessanti (e che richiameremo spesso negli esercizi e negli esempi) è il *grafo di Petersen* della Figura 1.8; si tratta di un grafo regolare 3-valente con molte proprietà "strane".

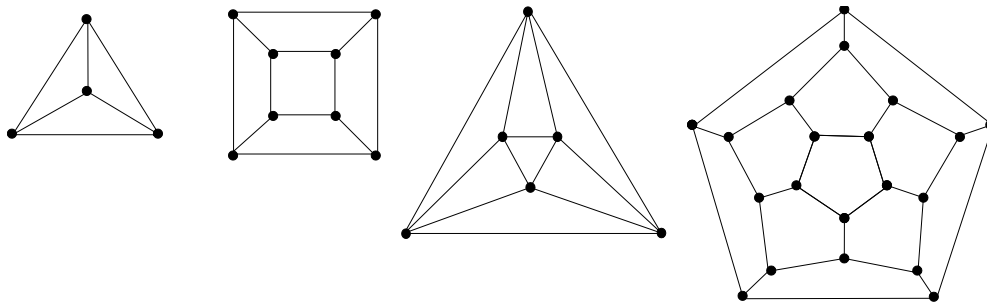


Figura 1.7: i grafi di alcuni solidi regolari.

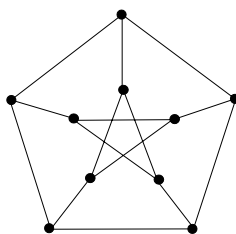


Figura 1.8: il grafo di Petersen.

Esercizio 1.1. Si rappresentino mediante un diagramma i seguenti grafi:

1) $\Gamma = (V, E)$, dove $V = \{0, 1\}^3$ è l'insieme delle terne a coefficienti in $\{0, 1\}$, e dati $a, b \in V$, $\{a, b\} \in E$ se e solo se a e b differiscono esattamente per una componente.

2) Sia $B_6 = (V, E)$, dove $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, e per $a, b \in V$, $\{a, b\} \in E$ se e solo se $a - b$ è dispari.

Esercizio 1.2. Ciascuno dei sette agenti segreti 001, 002, ..., 007 è incaricato di controllare l'operato di tre dei suoi colleghi. Si dimostri che almeno uno dei sette agenti non è controllato dagli stessi tre colleghi che egli controlla.

Esercizio 1.3. Dire se esistono grafi le cui sequenze dei gradi dei vertici sono, rispettivamente:

$$(1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 5), \quad (1, 1, 1, 2, 2, 2, 4, 7), \quad (1, 1, 2, 2, 3, 4, 4, 5).$$

Esercizio 1.4. Sia $\Gamma = (V, E)$ un grafo regolare 3-valente. Si provi che $|V|$ è pari. Si provi che per ogni numero pari n esiste un grafo regolare 3-valente con n vertici.

Esercizio 1.5. Provare che ogni grafo con 2 o più vertici ha almeno due vertici dello stesso grado.

1.2 Sottografi e isomorfismi.

Un grafo $\Gamma' = (V', E')$ si dice un **sottografo** del grafo $\Gamma = (V, E)$ se $\emptyset \neq V' \subseteq V$ e $E' \subseteq E$. Ad esempio, i diagrammi in figura 1.9 mostrano (rilevandone vertici e lati) alcuni sottografi del grafo di Petersen.

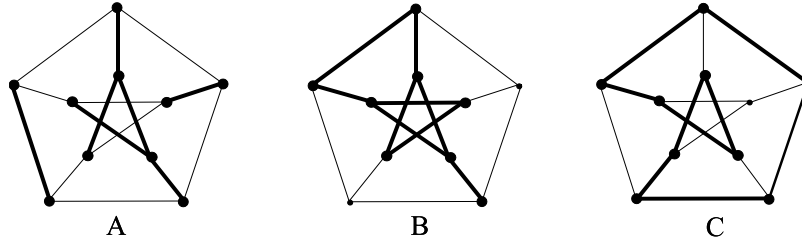


Figura 1.9: sottografi.

Un sottografo $\Gamma' = (V', E')$ di un grafo $\Gamma = (V, E)$ si dice **indotto** se, per ogni $u, v \in V'$, $\{u, v\} \in E \Rightarrow \{u, v\} \in E'$, ovvero se ogni lato di Γ i cui estremi stanno in Γ' è anche un lato di Γ' . Se $\emptyset \neq S \subseteq V$ è un sottoinsieme dell'insieme dei vertici di Γ , il sottografo *indotto* da S è il sottografo indotto di Γ il cui insieme di vertici è S . Negli esempi di figura 1.9 solo il caso B descrive un sottografo indotto. Nel seguente esempio, l'insieme dei vertici è $V = \{1, 2, \dots, 8\}$, e il grafo Γ' è il sottografo indotto da $S = V \setminus \{3\}$.

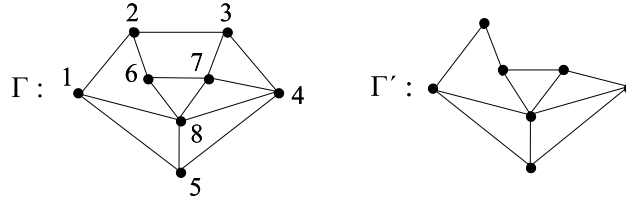


Figura 1.10: un sottografo indotto.

Quando due grafi sono lo "stesso grafo"? Consideriamo ad esempio il grafo che, nella prima pagina, ha dato luogo alla figura 1.1. Nel disegnare quel diagramma avremmo potuto disporre in modo diverso i punti sul foglio (ad esempio, come vertici di un ottagono regolare), e far corrispondere ad essi in modo diverso i vertici del grafo (cioè i sottoinsiemi di $X = \{1, 2, 3\}$): avremmo probabilmente ottenuto un disegno abbastanza diverso, come

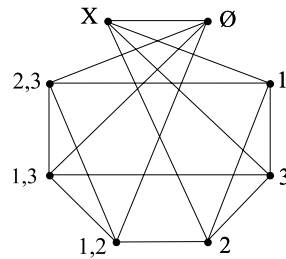


Figura 1.11: la figura 1.1 in un suo (riuscito?) travestimento.

che tuttavia rappresenta lo stesso grafo. Ora, ci si sarà a questo punto familiarizzati con l'idea che, per un grafo, il diagramma non è solotanto un mezzo per aiutare la nostra intuizione: esso infatti contiene tutte le informazioni sul grafo in quanto tale; in un certo senso, esso è *il grafo* (e difatti, il più delle volte, un grafo viene dato - come abbiamo fatto per il grafo di Petersen - direttamente e solo come diagramma),

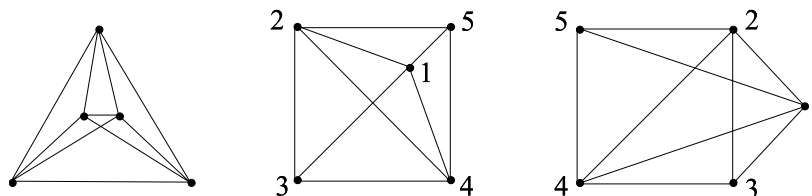
che tuttavia può *essere disegnato* in modi diversi. Dunque siamo portati a ritenere che, prescindendo dal fatto che siano stati ottenuti come rappresentazioni di un unico grafo definito astrattamente, i diagrammi delle figure 1.1 e 1.11 siano *lo stesso* grafo. Come per altre strutture matematiche, quest'idea viene formalizzata mediante un'opportuna nozione di isomorfismo.

Un **isomorfismo** tra due grafi $\Gamma = (V, E)$ e $\Gamma' = (V', E')$ è una biezione $\phi : V \rightarrow V'$ tra gli insiemi dei vertici tale che

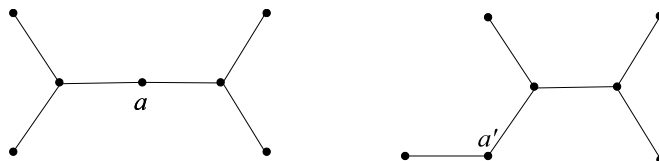
$$\{u, v\} \in E \iff \{\phi(u), \phi(v)\} \in E'.$$

Se una tale applicazione esiste, si dice che Γ e Γ' sono **isomorfi** (e si usa scrivere l'isomorfismo come $\phi : \Gamma \rightarrow \Gamma'$).

Ad esempio il primo grafo della figura seguente è isomorfo a K_5 (una qualsiasi corrispondenza biunivoca tra i vertici funziona); i due grafi a destra sono isomorfi tra loro (la numerazione indica una corrispondenza tra i vertici che realizza un isomorfismo di grafi), ma non sono isomorfi a K_5 (lo si dimostri).



In generale, non è facile stabilire se due grafi siano isomorfi, e non esiste un metodo efficace per farlo. Talvolta non rimane che procedere per tentativi: se il grafo non è molto grande ci si può aiutare pensando ai vertici come a palline rigide ed ai lati come ad elastici, che si possono deformare e sovrapporre, ma non staccare dalle palline che uniscono, e quindi tentare di immaginare se tendendo, contraendo, sovrapponendo, etc. gli elastici si riesce a passare da una configurazione all'altra; è chiaro che poi, se ci va bene, il tutto va tradotto in un argomento formalmente corretto (ad esempio indicando esplicitamente la corrispondenza tra i vertici che realizza l'isomorfismo). Naturalmente, vi sono anche considerazioni del tutto rigorose che è possibile fare prima di lanciarsi nei tentativi: ad esempio, se $\phi : \Gamma \rightarrow \Gamma'$ è un isomorfismo di grafi, si vede facilmente che $d_\Gamma(v) = d_{\Gamma'}(\phi(v))$ per ogni vertice v di Γ ; quindi, in particolare, grafi isomorfi hanno lo stesso numero di vertici di ciascun grado. Questa condizione non è tuttavia sufficiente a garantire che due grafi siano isomorfi; ad esempio, essa è soddisfatta dai due grafi della figura seguente,



i quali non sono isomorfi: infatti se vi fosse un isomorfismo tra di essi, allora il vertice a dovrebbe corrispondere al vertice a' (dato che questi sono i soli vertici di grado 2 in ognuno dei due grafi), ma nel grafo a sinistra a è adiacente ai due vertici di grado 3, ai quali dovrebbero corrispondere i due vertici di grado 3 del grafo di destra, che tuttavia non sono entrambi adiacenti ad a' . Tra i due grafi non vi può dunque essere un isomorfismo.

Ma anche questo tipo di considerazioni "locali" (cioè relative a quel che accade in prossimità di vertici che, in un ipotetico isomorfismo, si devono corrispondere) non sono sempre sufficienti per concludere. Ad esempio il grafo della Figura 1.12 è regolare 3-valente come il grafo di Petersen, ma non è isomorfo a quello (lo si dimostri in qualche modo).

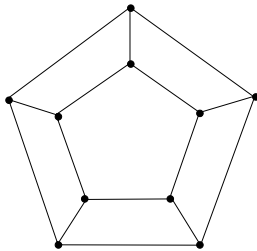
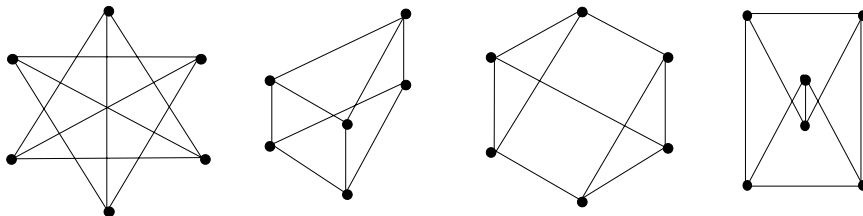


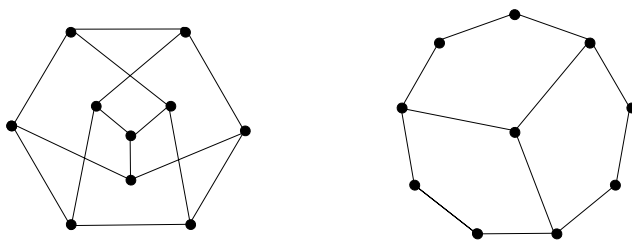
Figura 1.12: un grafo regolare trivalente.

Esercizio 1.6. Si dica quanti sono, a meno di isomorfismo, i grafi con quattro vertici. Quanti sono quelli privi di vertici isolati?

Esercizio 1.7. Si dica quali tra i seguenti grafi sono tra loro isomorfi:



Esercizio 1.8. Si provi che il grafo a sinistra nella figura di sotto è isomorfo al grafo di Petersen. Al grafo di destra si aggiungano opportunamente tre lati in modo da ottenere un grafo isomorfo al grafo di Petersen.



Esercizio 1.9. Prescindendo da qualsiasi limitazione di natura chimico-fisica o di orientazione, dire quante sono le possibili diverse molecole con formula chimica H_4C_2O in cui tutti i legami tra gli atomi sono semplici. Quante sono se si ammettono anche legami bivalenti? (si ricordi che gli atomi di idrogeno, carbonio e ossigeno hanno, rispettivamente, valenza 1, 4 e 2).

Esercizio 1.10. Sia $\Gamma = (V, E)$ un grafo. Il *grafo complementare* $\bar{\Gamma} = (V', E')$ è definito nel modo seguente $V' = V$ e, per ogni $u, v \in V$ con $u \neq v$, $\{u, v\} \in E'$ se e solo se $\{u, v\} \notin E$. Sia Γ un grafo con n vertici e tale che $\bar{\Gamma}$ è isomorfo a Γ . Si dica quanti lati ha Γ (in funzione di n). Si provi quindi che 4 divide $n(n - 1)$ e di conseguenza che $n \equiv 0, 1 \pmod{4}$. Si costruiscano grafi con 4 e con 5 vertici che siano isomorfi al loro grafo complementare.

1.3 Cammini, circuiti, connessione.

Sia $\Gamma = (V, E)$ un grafo, e siano $v, w \in V$ due vertici di Γ (non necessariamente distinti). Un **cammino** in Γ da v a w è una sequenza:

$$v = v_0 e_1 v_1 e_2 \dots v_{n-2} e_{n-1} v_{n-1} e_n v_n = w$$

di vertici $v_0, v_1, \dots, v_n \in V$ (non necessariamente distinti, se non consecutivi), e lati $e_1, e_2, \dots, e_n \in E$, *tutti distinti* e tali che $e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$, per ogni $i = 1, 2, \dots, n$. L'intero $n \geq 0$ si dice la *lunghezza* del cammino (osserviamo che prendiamo in considerazione anche cammini di lunghezza 0, formati cioè da un solo vertice e nessun lato).

Se $v_0 = v_n$, il cammino si chiama **circuito**. Un cammino (circuito) si dice **semplice** se tutti i vertici che lo compongono, tranne eventualmente il primo e l'ultimo, sono diversi; ovvero se, per ogni $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j \Rightarrow v_i \neq v_j$ (il cammino non "ripassa" per uno stesso vertice). Un circuito semplice con almeno tre lati si chiama anche *ciclo*.

In sostanza, in un grafo, un cammino semplice di lunghezza n i cui estremi sono diversi è un sottografo isomorfo al grafo P_n ; mentre un ciclo di lunghezza n è un sottografo isomorfo al n -ciclo C_n .

La definizione di cammino che abbiamo dato, richiedendo che tutti i lati siano distinti, è talvolta troppo restrittiva. Un concetto più ampio è quello di **passeggiata** in un grafo Γ , ovvero una sequenza di vertici e lati alternativamente $v_0 e_1 v_1 e_2 \dots v_{n-1} e_n v_n$, sottoposta alla sola condizione che ogni lato e_i abbia come estremi i vertici v_{i-1} e v_i (si possono quindi "percorrere" più di una volta gli stessi lati, anche "avanti e indietro" – come, appunto, di solito accade in una reale passeggiata). Ogni cammino è dunque una passeggiata, ma non viceversa. (Non esiste un accordo ecumenico a proposito della nomenclatura relativa a cammini, passeggiate, etc.; anche perché la letteratura essendo in modo preponderante in lingua inglese, occorrerebbe oltre a tutto accordarsi su come tradurre i vari termini come *kalk*, *track*, *trail*, *path*, e simili. In considerazione dello scopo circoscritto di queste note, abbiamo cercato di limitare l'introduzione di termini diversi, preferendo piuttosto impiegare qualche aggettivo in più, ma avvisando però che, trovandovi a consultare altri testi, una delle prime cose da fare è quella di controllare le definizioni di *cammino*, *circuito*, etc.)

Un grafo $\Gamma = (V, E)$ si dice **connesso** se per ogni coppia di vertici v, w esiste in Γ un cammino tra v e w (non è difficile provare che in tal caso esiste anche un cammino semplice tra v e w - vedi esercizio 1.11). In un grafo connesso la lunghezza minima di un cammino tra i vertici v e w si dice *distanza* tra v e w . Il *diametro* di un grafo connesso è la massima distanza che intercorre tra i suoi vertici.

Prima di provare una prima proprietà dei grafi connessi, introduciamo le seguenti e comode notazioni. Sia $\Gamma = (V, E)$ un grafo; fissato un suo lato $e \in E$, denotiamo con $\Gamma - e$ il grafo ottenuto da Γ togliendo il lato e (ma lasciando tutti i vertici); mentre se $v \in V$ è un vertice di Γ , denotiamo con $\Gamma - v$ il grafo ottenuto da Γ togliendo il vertice v e tutti i lati ad esso adiacenti. Pertanto, se $e \in E$: $\Gamma - e = (V, E \setminus \{e\})$; mentre se $v \in V$, $\Gamma - v$ è il sottografo indotto in Γ dall'insieme di vertici $V \setminus \{v\}$. Queste notazioni si estendono in modo naturale al caso di più lati, o più vertici, da togliere.

Proposizione 1.3. *Sia $\Gamma = (V, E)$ un grafo. Se Γ è connesso allora*

$$|E| \geq |V| - 1.$$

DIMOSTRAZIONE. Sia $\Gamma = (V, E)$ un grafo connesso, e procediamo per induzione sul numero n di vertici di Γ (cioè $n = |V|$). Se $n = 1$ o 2 l'asserto è ovvio. Sia $n \geq 3$, ed assumiamo che la proprietà sia soddisfatta da ogni grafo con un numero di vertici strettamente minore di n .

Supponiamo che si abbia $d_\Gamma(v) \geq 2$, per ogni $v \in V$; allora, per il Teorema 1.1,

$$2|E| = \sum_{v \in V} d_\Gamma(v) \geq \sum_{v \in V} 2 = 2|V|$$

e quindi $|E| \geq |V|$. Altrimenti, esiste un vertice v tale che $d_\Gamma(v) = 1$ (essendo connesso con almeno due vertici, Γ non ha vertici isolati). Consideriamo il grafo $\Gamma' = \Gamma - v$. Allora, Γ' è connesso, perché un cammino che in Γ congiunge due vertici diversi da v è tutto contenuto in Γ' (infatti, se passasse per v dovrebbe contenere due volte il solo lato incidente a v). D'altra parte, l'insieme E' dei lati di Γ' è costituito da tutti i lati di Γ con l'esclusione del solo lato incidente a v . Dunque, applicando l'ipotesi induttiva,

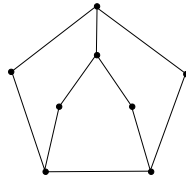
$$|E| = |E'| + 1 \geq (|V| - 1) + 1 = |V|$$

come si voleva. ■

A questo punto è naturale, dato un grafo Γ , introdurre una relazione sull'insieme V dei vertici, dicendo che due vertici sono in relazione se esiste un cammino (eventualmente di lunghezza 0) che li congiunge. È chiaro che tale relazione è un'equivalenza sull'insieme V . Le **componenti connesse** di Γ sono i sottografi indotti dalle singole classi di equivalenza di vertici. Si osserva facilmente che le componenti connesse di un grafo sono i suoi sottografi connessi massimali. È anche immediato provare (lo si faccia per esercizio) che dato un grafo $\Gamma = (V, E)$ ed un isomorfismo $\phi : \Gamma \rightarrow \Gamma'$ di grafi, Γ è connesso se e solo se Γ' è connesso; inoltre, per ogni coppia di vertici $v, w \in V$, la distanza tra di essi in Γ è uguale alla distanza in Γ' delle loro immagini $\phi(v), \phi(w)$.

Esercizio 1.11. Siano v, w vertici distinti di un grafo Γ . Si provi che se esiste un cammino in Γ da v a w allora esiste anche un cammino semplice da v a w .

Esercizio 1.12. Si determini il diametro del seguente grafo. Qual è il minimo numero di lati che occorre aggiungere in modo da ottenere un grafo di diametro 2?



Esercizio 1.13. Per ogni $n \geq 2$, sia $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$. Sia quindi $B_n = (V, E)$ il grafo con $V = I_n$, e per $a, b \in V$, $\{a, b\} \in E$ se e solo se $a - b$ è dispari. Si provi che B_n è connesso, che ha diametro 2, e che è regolare se e soltanto se n è pari.

Esercizio 1.14. Sia Γ un grafo connesso in cui ogni vertice è pari. Si provi che per ogni lato e di Γ , il sottografo $\Gamma - e$ è connesso.

Esercizio 1.15. Sia Γ un grafo con n vertici e tale che per ogni coppia di vertici v, w non adiacenti si ha $d_\Gamma(v) + d_\Gamma(w) \geq n - 1$. Si provi che Γ è connesso.

1.4 Alberi.

Un **albero** è un grafo connesso privo di circuiti non banali (il che equivale all'essere connesso e privo di cicli). Un grafo privo di cicli (ma non necessariamente connesso) si chiama una **foresta**. È chiaro che un grafo è una foresta se e solo se ogni sua componente connessa è un albero.

Il diagramma della molecola di etanolo di Figura 1.2 è un esempio di albero; un altro esempio è l'albero di affinità genetica tra alcune specie di primati secondo le ipotesi più recenti:

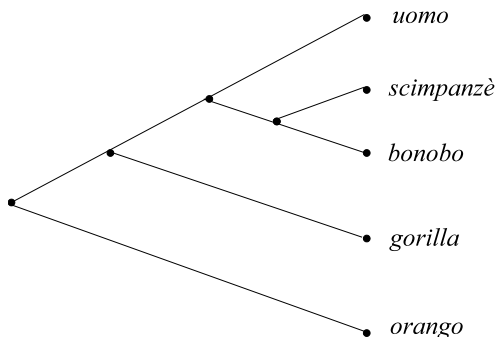


Figura 1.13: l'albero genetico di alcune specie di scimmie.

Iniziamo lo studio degli alberi con un'osservazione elementare ma utile.

Lemma 1.4. *Un albero con almeno due vertici ha almeno due vertici di grado 1.*

DIMOSTRAZIONE. Sia Γ un albero con almeno due vertici (e quindi, essendo connesso, almeno un lato), e sia $v_0 e_1 v_1 \dots e_n v_n$ un cammino semplice in Γ di lunghezza massima possibile. Poiché in Γ non vi sono cicli, $v_0 \neq v_n$, e v_0, v_n sono vertici di grado 1. Infatti se così non fosse e, ad esempio, v_n avesse grado almeno 2, esisterebbe un altro lato $e = \{v_n, w\}$ (con $w \neq v_{n-1}$) incidente a v_n . Ma allora, per la massimalità del cammino semplice scelto, la sequenza $v_0 e_1 v_1 \dots e_n v_n e w$ non è un cammino semplice, e dunque $w = v_i$ per un $0 \leq i \leq n - 2$ (che è unico perché il cammino iniziale è semplice). Ma allora si avrebbe in Γ il circuito semplice $v_i e_{i+1} \dots v_{n-1} e_n v_n e w = v_i$, e quindi una contraddizione. ■

Tra i grafi connessi, gli alberi sono caratterizzati da una semplice proprietà numerica.

Teorema 1.5. *Sia $\Gamma = (V, E)$ un grafo connesso. Allora Γ è un albero se e solo se $|E| = |V| - 1$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\Gamma = (V, E)$ un grafo connesso. Se Γ non è un albero, Γ contiene un circuito. Sia e uno dei lati di un fissato circuito di Γ ; allora il sottografo $\Gamma' = \Gamma - e$ è connesso (infatti, da un cammino in Γ che congiunga i vertici u e v e contenga il lato e , si può ricavare un cammino da u a v che non utilizza e semplicemente percorrendo, al punto giusto, invece di e il resto del circuito a cui e appartiene). Dunque, per la Proposizione 1.3, il numero di lati di Γ' è maggiore o uguale al numero dei suoi vertici meno 1, cioè $|E \setminus \{e\}| \geq |V| - 1$, da cui $|E| > |V| - 1$. Viceversa, supponiamo che Γ sia un albero, e proviamo l'uguaglianza dell'enunciato per induzione sul numero n di vertici

di Γ . Se $n = 1$ non c'è nulla da provare. Sia dunque $n \geq 2$. Per il Lemma 1.4, Γ ha almeno un vertice v di grado 1; sia e il solo lato di Γ incidente a v , e consideriamo il sottografo $\Gamma - v$. Chiaramente $\Gamma - v = (V \setminus \{v\}, E \setminus \{e\})$ è ancora un albero, e dunque, per ipotesi induttiva, $|E \setminus \{e\}| = |V \setminus \{v\}| - 1$, da cui si ricava $|E| = |V| - 1$. ■

Corollario 1.6. *Sia $\Gamma = (V, E)$ una foresta. Allora, il numero di componenti connesse di Γ è $|V| - |E|$.*

DIMOSTRAZIONE. Poiché una foresta Γ è priva di circuiti, ogni sua componente connessa è un albero, e dunque, per il Teorema 1.5 contribuisce con 1 al valore di $|V| - |E|$. ■

Si possono dare altre utili caratterizzazioni degli alberi, che non sono difficili da provare. Alcune sono suggerite dalla proposizione seguente.

Proposizione 1.7. *Sia Γ un grafo. Le seguenti condizioni sono equivalenti:*

- (i) Γ è un albero;
- (ii) per ogni coppia di vertici di Γ esiste uno ed un solo cammino che li congiunge;
- (iii) Γ è connesso e, per ogni suo lato e , $\Gamma - e$ è non-connesso.

DIMOSTRAZIONE. Esercizio. ■

Esercizio 1.16. Si provi che il Teorema 1.5 non vale se $\Gamma = (V, E)$ non è connesso (meglio: provare che, senza l'ipotesi di connessione, non è vero che se $|E| = |V| - 1$ allora Γ è una foresta).

Esercizio 1.17. Si trovino, a meno di isomorfismi, tutti gli alberi con 6 e con 7 vertici.

Esercizio 1.18. Sia $\Gamma = (V, E)$ un grafo connesso e tale che $\sum_{v \in V} d_\Gamma(v) > 2|V|$. Si provi che Γ ha almeno due cicli distinti.

Esercizio 1.19. Sia Γ un albero con 45 vertici, dei quali 3 sono di grado 5, 4 di grado 4, 5 di grado 3, e nessuno di grado superiore. Quanti sono in Γ i vertici di grado 1, e quanti quelli di grado 2?

Esercizio 1.20. Siano $1 \leq d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$ interi positivi tali che $\sum_{i=1}^n d_i = 2n - 2$. Si provi che esiste un albero T con n vertici v_1, v_2, \dots, v_n tale che $d_T(v_i) = d_i$ per ogni $1 \leq i \leq n$.

1.5 Spanning-trees.

Sia Γ un grafo: uno **spanning-tree** di Γ è un sottografo che è un albero ed il cui insieme dei vertici coincide con quello di Γ .

Proposizione 1.8. *Ogni grafo connesso ammette almeno uno spanning-tree.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\Gamma = (V, E)$ un grafo connesso, e sia $T = (S, E')$ un sottoalbero di Γ con il massimo numero possibile di lati (certamente, un tale T esiste). Proviamo che $S = V$ e dunque che T è uno spanning-tree di Γ . Poiché T è un albero, $|S| = |E'| + 1$. Supponiamo, per assurdo, $S \neq V$; allora, poiché Γ è connesso, esiste un lato $e = \{v, w\}$ di Γ tale che $v \in S$ e $w \notin S$. Ma allora il sottografo $T' = (S \cup \{w\}, E' \cup \{e\})$ è connesso, e, per il teorema 1.5, è un albero dato che $|S \cup \{w\}| = |S| + 1 = |E'| + 2 = |E' \cup \{e\}| + 1$, e ciò va contro la scelta di T . ■

La figura 1.14 mostra alcuni spanning-trees di uno stesso grafo. È chiaro che uno spanning-tree non è univocamente individuato, nemmeno a meno di isomorfismo; anzi, in molte applicazioni (come vedremo tra poco) ci si pone il problema di trovare, dato un grafo, degli spanning-trees "migliori" di altri.

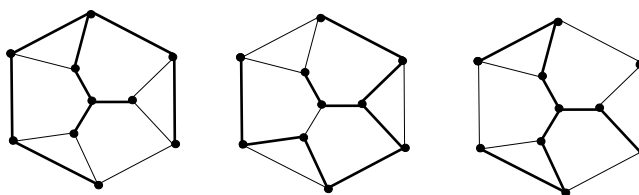


Figura 1.14: esempi di spanning-tree.

La dimostrazione che abbiamo dato della Proposizione 1.8 non è costruttiva, e non è la più intuitivamente semplice, ma ha il pregio di poter essere estesa a grafi connessi infiniti. Il solo vero problema, in tal caso, è quello dell'esistenza di un sottoalbero massimale, e questa può essere dedotta dal Lemma di Zorn. Nel caso di grafi finiti, una maniera più semplice è quella di partire dal grafo dato Γ : se Γ è un albero non c'è bisogno di far nulla; altrimenti Γ ha un circuito, e si considera allora il grafo ricavato da Γ togliendo uno dei lati di tale circuito, si ottiene così un grafo connesso Γ' che ha gli stessi vertici di Γ ed un lato in meno. Se Γ' è un albero siamo a posto; altrimenti si procede togliendo a Γ' un lato appartenente ad un circuito e così via: procedendo in questo modo si perviene dopo un numero finito di passi ad uno spanning-tree del grafo iniziale Γ . Un'altra maniera è quella, viceversa, di partire dal grafo privo di lati e con gli stessi vertici di Γ e di aggiungervi uno alla volta opportuni lati di Γ che non facciano chiudere un circuito. Spiegheremo meglio questo metodo affrontando un problema più elaborato, che introduciamo mediante un esempio.

Supponiamo che una banca di una grande città intenda realizzare una connessione tramite fibra ottica tra le sue diverse filiali: la situazione può essere schematizzata mediante un grafo, i cui vertici sono le filiali della banca, ed i lati le eventuali connessioni tra di esse che sarebbe effettivamente possibile realizzare nella pratica. Nella sua formulazione più semplice, il problema è quindi quello di trovare uno spanning-tree di tale grafo. Ma occorre considerare che il costo, preventivamente valutato, della realizzazione di ciascun ipotetico tratto di fibra ottica varia in dipendenza di diversi fattori (e non esclusivamente dalla sua lunghezza: attraversare una strada a grande scorrimento può essere più oneroso che attraversare un terreno aperto per un tratto di lunghezza molto maggiore); quindi, nel grafo delle possibili connessioni, ad ogni lato è assegnato un costo di realizzazione, ed allora il problema diventa quello di trovare uno spanning-tree il cui costo complessivo (la somma dei costi dei lati che lo compongono) sia il minimo possibile. Vediamo come esista un semplice algoritmo che risolve questo problema.

Dunque, abbiamo dati un grafo connesso $\Gamma = (V, E)$, ed una funzione (detta di solito una *funzione di costo*) $\mathbf{c} : E \rightarrow \mathbb{R}$, che ad ogni lato e di Γ associa un numero reale non negativo $\mathbf{c}(e)$; ed il problema è quello di trovare uno spanning-tree $T = (V, S)$ di Γ tale che il suo costo totale

$$\mathbf{c}(T) = \sum_{e \in S} \mathbf{c}(e)$$

sia il minore possibile. È chiaro che, essendo finito il numero di spanning-trees di Γ , un tale T esiste. L'algoritmo per trovarne uno è il seguente:

- si parte dal grafo $\Gamma_0 = (V, \emptyset)$;
- si sceglie un lato e_1 di Γ di costo minimo, e si considera il grafo $\Gamma_1 = (V, \{e_1\})$;
- se Γ_1 è connesso (cioè se Γ ha solo due vertici) ci si ferma, e $T = \Gamma_1$; altrimenti si sceglie un lato $e_2 \in E \setminus \{e_1\}$ di costo minimo e si considera il grafo $\Gamma_2 = (V, \{e_1, e_2\})$;
- se Γ_2 è connesso, $\Gamma_2 = T$; altrimenti si sceglie in $E \setminus \{e_1, e_2\}$ un lato e_3 che aggiunto a Γ_2 non chiuda un circuito e sia di costo minimo tra quelli che soddisfano tale condizione;
- si pone $\Gamma_3 = (V, \{e_1, e_2, e_3\})$; se Γ_3 è connesso $\Gamma_3 = T$; altrimenti si continua scegliendo un lato e_4 di Γ non ancora utilizzato che non chiuda un circuito di Γ_3 e di costo minimo;
- si procede in questa maniera, ottenendo ad ogni passo un grafo Γ_k con gli stessi vertici di Γ e k lati; se Γ_k è connesso allora $\Gamma_k = T$; altrimenti si sceglie, tra i lati di Γ non ancora utilizzati, uno di costo minimo tra quelli che non chiudono circuiti in Γ_k , e lo si aggiunge a Γ_k , ottenendo il grafo Γ_{k+1} ;

Dopo un numero finito di passi questa procedura si arresta ad uno spanning-tree T di Γ che, come proveremo tra poco, ha costo minimo.

Per questa volta (ma solo per questa volta, dato che non si tratta del pane quotidiano di chi scrive), descriviamo in modo formale l'algoritmo:

Algoritmo per spanning-tree minimali

Input: un grafo connesso $\Gamma = (V, E)$ ed una funzione di costo \mathbf{c} su E .

SET $S = \emptyset$.

WHILE (V, S) è non-connesso

scegli $e \in E$ i cui estremi sono in componenti connesse distinte di (V, S)
e con costo $\mathbf{c}(e)$ minimo;

$S \leftarrow S \cup \{e\}$;

RETURN (V, S)

Proviamo che questo algoritmo funziona, e fornisce in output uno spanning-tree di costo minimo. Sia $T = (V, S)$ il grafo finale prodotto dall'algoritmo. Per costruzione, T è privo di circuiti: infatti, ad ogni passo, la procedura aggiunge un lato i cui estremi giacevano in componenti connesse distinte del grafo al passo precedente, e quindi non può generare circuiti. L'algoritmo si arresta quando è pervenuto ad un grafo connesso che, poiché contiene gli stessi vertici di Γ , è uno spanning-tree di quest'ultimo. Dobbiamo ora verificare che T è uno spanning-tree di costo minimo. Siano e_1, e_2, \dots, e_{n-1} i lati di

T nell'ordine in cui sono stati scelti ai singoli passi (poiché T è un albero, n è il numero di vertici di T e quindi di Γ). È chiaro che

$$\mathbf{c}(e_1) \leq \mathbf{c}(e_2) \leq \cdots \leq \mathbf{c}(e_{n-1}).$$

Siano f_1, f_2, \dots, f_{n-1} i lati di un altro spanning-tree T' di Γ , elencati in ordine crescente di costo. Proviamo che

$$\sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{c}(e_i) = \mathbf{c}(T) \leq \mathbf{c}(T') = \sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{c}(f_i)$$

mostrando, per induzione, che per ogni $1 \leq k \leq n-1$ si ha

$$\sum_{i=1}^k \mathbf{c}(e_i) \leq \sum_{i=1}^k \mathbf{c}(f_i).$$

Per $k=1$ la cosa è assicurata dalla scelta iniziale di e_1 . Sia $k \geq 2$; per ipotesi induttiva

$$\sum_{i=1}^{k-1} \mathbf{c}(e_i) \leq \sum_{i=1}^{k-1} \mathbf{c}(f_i).$$

Al passo k l'algoritmo sceglie il lato e_k . Se $\mathbf{c}(e_k) \leq \mathbf{c}(f_k)$ allora otteniamo immediatamente dall'ipotesi induttiva

$$\sum_{i=1}^k \mathbf{c}(e_i) = \sum_{i=1}^{k-1} \mathbf{c}(e_i) + \mathbf{c}(e_k) \leq \sum_{i=1}^{k-1} \mathbf{c}(f_i) + \mathbf{c}(f_k) = \sum_{i=1}^k \mathbf{c}(f_i).$$

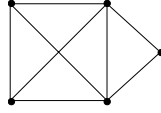
Quindi possiamo assumere $\mathbf{c}(e_k) > \mathbf{c}(f_k)$. In particolare, poiché $\mathbf{c}(f_1) \leq \cdots \leq \mathbf{c}(f_k)$, $e_k \notin \{f_1, \dots, f_k\}$. Siccome l'algoritmo sceglie e_k , ciò significa che ognuno dei lati f_1, \dots, f_k deve congiungere vertici che appartengono ad una stessa componente connessa di $T_{k-1} = (V, \{e_1, \dots, e_{k-1}\})$ (detto meglio, ogni f_i appartiene al grafo indotto in Γ da una componente connessa di T_{k-1}). Questo significa che il numero di componenti connesse di $T'_k = (V, \{f_1, \dots, f_k\})$ è maggiore o uguale di quello delle componenti connesse di T_{k-1} . Ma sia T_{k-1} che T'_k sono grafi privi di circuiti, e dunque (Corollario 1.6) il numero delle loro componenti connesse è dato dalla differenza tra il numero dei vertici e quello dei lati, che è $n - (k-1)$ per T_{k-1} , e $n - k$ per T'_k , una contraddizione. ■

Quello che abbiamo appena descritto è uno degli algoritmi noti come algoritmi *greedy* (ingordi). Si tratta di algoritmi che, disegnati per giungere per passi ripetuti alla determinazione di un certo oggetto, effettuano ad ogni passo, tra le opzioni consentite, la scelta localmente più conveniente, senza guardarsi indietro o più avanti. In effetti, è sorprendente che algoritmi tanto "stupidi" possano in certe situazioni condurre ad un risultato ottimale. Nonostante possa essere confortante apprendere come, a volte, per fare le scelte giuste non sia necessario essere navigati, l'esperienza e la filosofia morale di ogni tempo (e, se vogliamo, anche innumerevoli processi decisionali rigorosamente formalizzabili) ci insegnano che in genere non è così: uno scacchista che applicasse un algoritmo greedy accetterebbe senza riflettere qualunque sacrificio proposto da un avversario appena più astuto, divertendosi forse, ma finendo col venire ignominosamente cacciato, dopo un paio di partite, da qualsiasi circolo di cui non risultasse il principale finanziatore.

Esercizio 1.21. Sia Γ un grafo. Si dica quali tra le seguenti affermazioni sono corrette:

- 1) gli spanning-tree di Γ hanno tutti lo stesso numero di vertici di grado 1;
- 2) gli spanning-tree di Γ hanno tutti lo stesso numero di lati;
- 3) gli spanning-tree di Γ hanno tutti lo stesso diametro.

Esercizio 1.22. Si determinino, a meno di isomorfismi, tutti gli spanning-trees del grafo



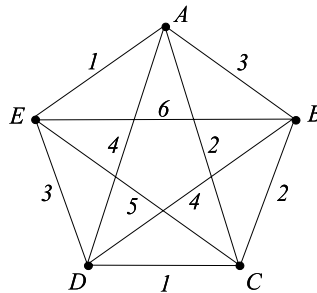
Esercizio 1.23. Provare che ogni albero con n vertici è isomorfo ad uno spanning-tree del grafo completo K_n .

Esercizio 1.24. Sia Γ il grafo costruito nella maniera seguente. I vertici di Γ sono tutti i punti a coordinate intere contenuti nel quadrato $[0, 3] \times [0, 3]$ in un piano cartesiano, ed i lati di Γ congiungono due punti se e solo se la distanza euclidea tra questi è 1. Si calcoli il costo minimo complessivo di uno spanning-tree di Γ , nei due casi seguenti.

- 1) Ad ogni lato $e = \{(a, b), (a', b')\}$ è assegnato un costo $c(e) = \min\{a + b, a' + b'\}$.
- 2) Il costo dei lati è 1 per tutti i lati "verticali", mentre è uguale ad $a + 1$ per i lati del tipo $\{(a, b), (a + 1, b)\}$.

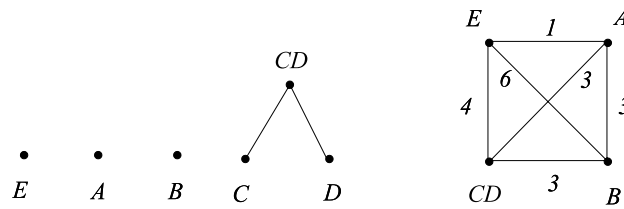
Esercizio 1.25. Sia Γ un grafo connesso, e siano $T_1 = (V, E_1)$ e $T_2 = (V, E_2)$ due spanning-trees distinti di Γ . Sia e_1 un lato di T_1 che non appartiene a T_2 ; provare che esiste un lato e_2 , appartenente a T_2 ma non a T_1 , tale che $T = (V, (E_2 \setminus \{e_2\}) \cup \{e_1\})$ è uno spanning-tree di Γ .

Digressione: alberi evolutivi. Supponiamo di aver dato un insieme finito di n oggetti (punti) e che per ogni coppia di essi sia definita una "distanza" (un numero reale positivo). Questo, dal punto di vista dei grafi, significa avere dato un grafo completo K_n con una funzione di costo sui lati (anche se nei casi che abbiamo in mente il costo di un lato esprime in realtà una misura della diversità tra i due oggetti rappresentati dagli estremi del lato stesso). Vogliamo ora costruire un albero che schematizzi un'ipotesi di come le varie differenze possano essere derivate temporalmente. Illustriamo il metodo di base più semplice mediante un esempio.

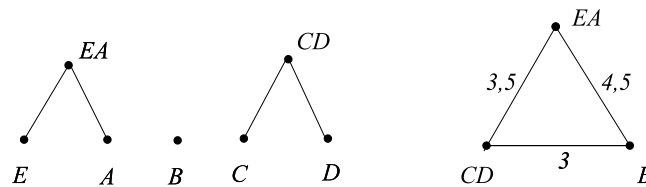


Supponiamo che gli oggetti dati siano A, B, C, D ed E , e che la distanza tra ciascuna coppia di essi sia codificata dalla funzione di costo su K_5 indicata nella Figura. Si disegnano su un altro foglio i cinque punti A, B, C, D, E isolati. Si sceglie in K_5 un albero di peso minimo, ad esempio $\{D, C\}$, e sull'altro foglio si inserisce un nuovo punto CD , e due lati che lo congiungono a C ed a D ; quindi sul primo foglio si costruisce un grafo K_4 "fondendo" i vertici C e D , e pesando i lati con il peso precedente (nel grafo K_5 di partenza) se i loro estremi sono entrambi diversi da

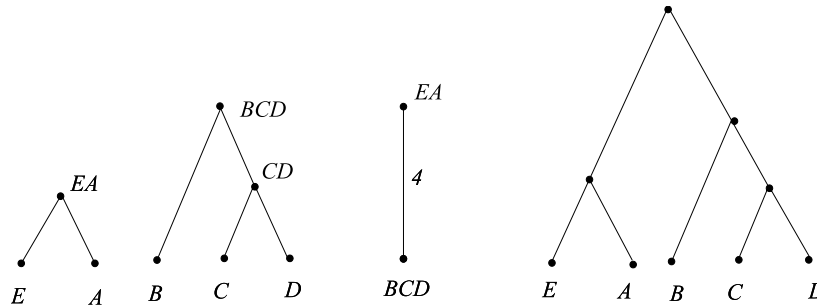
C e D , mentre i lati del tipo $\{X, CD\}$ vengono pesati con la media aritmetica dei pesi dei lati originari $\{X, C\}$ e $\{X, D\}$.



Si ripete la procedura a partire dal nuovo grafo pesato K_4 e, sull'altro foglio, dal grafo sui vertici A, B, E e CD . In questo caso scegliendo il lato $\{E, A\}$.



Quindi si procede allo stesso modo sul triangolo rimasto, scegliendo il lato $\{CD, B\}$, ed infine contraendo l'ultimo lato residuo, ed ottenendo sull'altro foglio l'albero a destra in figura.



Questo metodo può essere applicato a partire da qualunque grafo completo pesato K_n , e produce, dopo esattamente $k - 1$ passi un albero nel quale le "foglie" (cioè i vertici di grado 1) sono in corrispondenza biunivoca con i vertici dal grafo iniziale K_n , c'è un solo vertice di grado 2 (l'ultimo che viene inserito), ed ogni altro vertice ha grado 3. Un albero di questo tipo si chiama albero binario con radice (la radice è l'unico vertice di grado 2). La verifica di queste affermazioni è lasciata per esercizio: osserviamo però che può essere necessario in alcuni passi effettuare delle scelte non deterministiche (dato che - come al primo passo del nostro esempio - è possibile che ci sia più di un lato di peso minimo); le diverse scelte danno luogo ad alberi diversi.

Quella che abbiamo illustrato è una versione molto elementare dei metodi che possono essere utilizzati per ricostruire a posteriori alberi evolutivi di vario genere. Ad esempio, l'albero della Figura 1.13 è ricavato con metodi di questo tipo a partire dal confronto del genoma delle specie in esame, che fornisce le distanze iniziali. Ma procedure del genere si possono applicare in svariati ambiti (posto che si sia in grado di stabilire in modo appropriato una misura delle differenze): ad esempio nello studio della presunta evoluzione delle lingue¹:

¹Quest'esempio e quello della figura 1.13 sono tratti dal libro L. L. Cavalli-Sforza, *Geni, popoli e lingue* (Adelphi), un capitolo del quale è intitolato "Una passeggiata nella foresta".

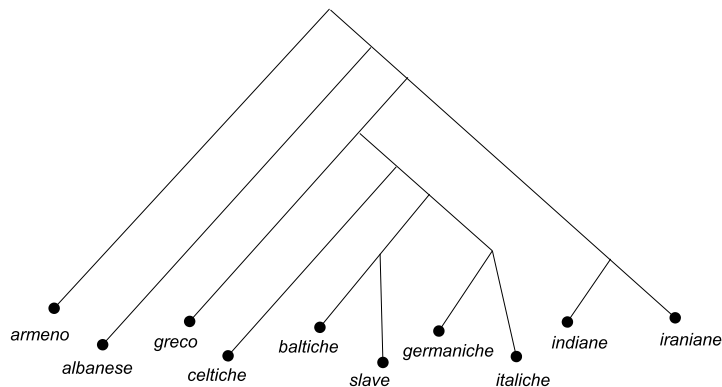


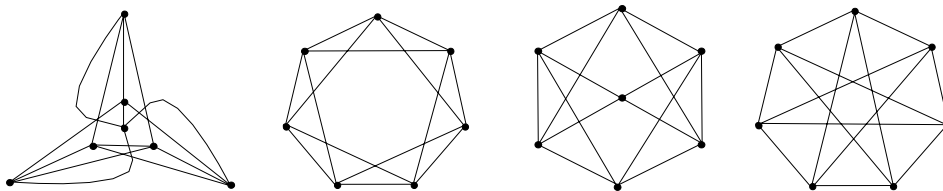
Figura 1.15: albero di derivazione di alcune lingue indoeuropee.

Naturalmente, nella pratica è spesso necessario modificare l'approccio più ingenuo: ad esempio potrebbe essere più realistico assegnare il peso dei nuovi lati non semplicemente calcolando una media locale, ma tenendo anche conto di tutti i pesi complessivi, o di più sottili ragioni statistiche. Ma ci fermiamo qui, dato che intendevamo soltanto suggerire una delle tante applicazioni del concetto di albero.

ULTERIORI ESERCIZI

Esercizio 1.26. Provare che ogni grafo regolare 2-valente connesso e con n vertici è isomorfo al ciclo C_n .

Esercizio 1.27. Si dica quali tra i seguenti grafi sono tra loro isomorfi.



Esercizio 1.28. Siano $1 \leq k < n$, con $n \geq 2k$. Il grafo di Kneser $K(n, k)$ è il grafo i cui vertici sono tutti i sottoinsiemi di cardinalità k dell'insieme $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ (quindi il numero dei vertici è $\binom{n}{k}$), e due vertici sono adiacenti se e solo se la loro intersezione è vuota. Si provi che il grafo di Kneser $K(5, 2)$ è isomorfo al grafo di Petersen.

Esercizio 1.29. Sia $\Gamma = (V, E)$ un grafo connesso. Siano V_1 l'insieme dei vertici di grado 1, e W quello dei vertici di grado maggiore o uguale a 3. Si provi che se

$$|V_1| \geq \sum_{v \in W} d_{\Gamma}(v)$$

allora $|W| = 1$ e Γ è un albero con un solo vertice di grado 3, oppure $|W| = 0$ e Γ è un albero con due vertici di grado 1 (e quindi è un grafo P_n) o è isomorfo al ciclo C_n .

Esercizio 1.30. Si provi che un grafo connesso regolare 3-valente di diametro 2 ha al più 10 vertici. provare che, a meno di isomorfismo, esistono 2 grafi 3-valenti con 6 vertici.

Esercizio 1.31. Sia Γ un grafo in cui ogni vertice ha grado ≥ 4 . Si dica quali delle due seguenti affermazioni è corretta.

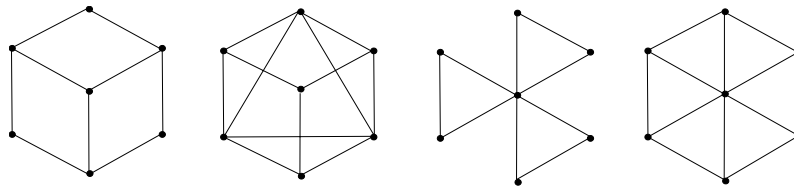
- (i) Il numero di lati di Γ è almeno il doppio di quello dei vertici.
- (ii) Se Γ è connesso, allora togliendo da Γ un lato qualsiasi si ottiene ancora un grafo connesso.

Esercizio 1.32. 1) Sia Γ un grafo non connesso. Si provi che il suo grafo complementare (vedi esercizio 1.10) è connesso.

2) Supponiamo di aver colorato ogni lato di un grafo completo K_n con uno di due colori dati (diciamo: rosso o verde). Si provi che esiste uno spanning-tree di K_n monocromo.

Esercizio 1.33. Sia $\Gamma = (V, E)$ un grafo con n vertici. Si provi che se $|E| > \binom{n-1}{2}$ allora Γ è connesso. Cosa si può dire se $|E| = \binom{n-1}{2}$?

Esercizio 1.34. Per ciascuno dei seguenti grafi dire (giustificando le risposte); i) se è vero che il grafo ammette almeno tre spanning-trees tra loro non isomorfi; ii) se è possibile decomporre il grafo in due spanning-trees che non abbiano lati in comune.



Esercizio 1.35. Dato un grafo $\Gamma = (V, E)$, definiamo il grafo $L(\Gamma) = (V_c, E_c)$ (detto *line graph* associato a Γ) nel modo seguente. I vertici di $L(\Gamma)$ sono i lati di Γ (cioè $V_c = E$), e due elementi $e, e' \in E$ sono congiunti da un lato di $L(\Gamma)$ se e solo se hanno un vertice in comune (cioè se $e \cap e' \neq \emptyset$). Si provi che se Γ è privo di punti isolati, allora $L(\Gamma)$ è connesso se e solo se Γ è connesso.

Esercizio 1.36. Con le notazioni dell'esercizio precedente, si provi che

$$|E_c| = \frac{1}{2} \sum_{v \in V} d_{\Gamma}(v)(d_{\Gamma}(v) - 1).$$

Si provi quindi che Γ è isomorfo a $L(\Gamma)$ se e soltanto se Γ è un ciclo C_n , dove $n = |V|$ (può tornare utile l'esercizio 1.29).

Esercizio 1.37. Si provi che un grafo connesso in cui ogni vertice ha grado pari ha uno spanning-tree in cui ogni vertice ha grado 1 o pari. Si dia un esempio di un grafo connesso con tutti i vertici di grado dispari tale che ogni suo spanning-tree ha almeno un vertice di grado pari.

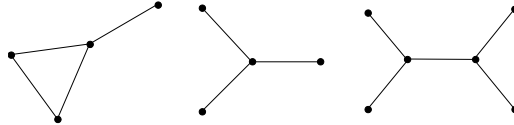
Esercizio 1.38. Siano n, k interi positivi non nulli, e sia V l'insieme delle parole di lunghezza k in un alfabeto con n simboli. Ad ogni lato del grafo completo il cui insieme dei vertici è V assegnamo un costo pari al numero di posizioni in cui le lettere che compongono le due parole agli estremi del lato sono diverse. Qual è il costo di uno spanning-tree minimo?

Esercizio 1.39. Sia Γ un albero, e κ la lunghezza massima di un cammino (semplice) di Γ . Sia

$$v_0 e_1 v_1 e_2 \dots v_{\kappa-1} e_\kappa v_\kappa$$

un cammino di lunghezza massima in Γ . Si provi che v_0 e v_κ sono vertici di grado 1. Si supponga quindi che $\kappa = 2t$ sia pari, e sia $v = v_t$ il vertice "centrale" del cammino dato; si provi che ogni altro cammino di lunghezza κ di Γ passa per v . Cosa si può dire se κ è dispari?

Esercizio 1.40. Si dia la definizione di automorfismo, e quindi quella di gruppo degli automorfismi, di un grafo. Si descriva quindi il gruppo degli automorfismi dei seguenti grafi



Esercizio 1.41. Dopo aver osservato che il gruppo degli automorfismi di un grafo con n vertici è isomorfo ad un sottogruppo del gruppo simmetrico S_n , si dimostri che i soli grafi con n vertici il cui gruppo degli automorfismi è isomorfo a S_n sono il grafo banale (cioè quello privo di lati) ed il grafo completo K_n .

2 Grafi con particolari proprietà

I grafi sono spesso associati alla matematica ricreativa ed ai cosiddetti "rompicapo", problemi di natura logico-matematica la cui formulazione ricorre (in modo spesso forzatamente immaginifico) a situazioni reali o, almeno, realisticheggianti, e può essere compresa anche senza una specifica preparazione. Questa propensione antiletaria è presente nella teoria dei grafi sin dal suo ingresso ufficiale nella matematica, avvenuto nel 1736, anno della pubblicazione negli atti dell'Accademia delle Scienze di Pietroburgo di una memoria di Leonardo Eulero, nella quale egli affrontava e risolveva in grande generalità il famoso

Problema dei ponti di Königsberg. La città di Königsberg (oggi Kaliningrad) nella Prussia Orientale (oggi un enclave russa tra la Polonia e la Lituania) sorge alla foce del fiume Pregel, che in quel punto forma due isole. Nel settecento le varie parti della città erano collegate da un sistema di sette ponti:

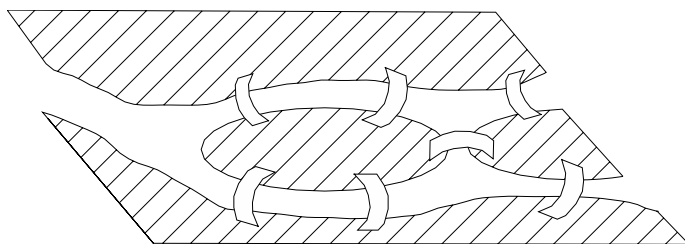


Figura 2.1: i ponti di Königsberg . . .

ed era costume delle famiglie borghesi del tempo (tra cui immaginiamo la famiglia Kant con il piccolo Immanuel che ancora succhia un lecca-lecca) recarsi a passeggiare, nelle domeniche di bel tempo, lungo le rive del fiume e le sue isole. Assieme ai cittadini, circolava anche il problema seguente: è possibile fare una passeggiata che partendo ed arrivando nello stesso luogo porti ad attraversare una ed una sola volta tutti e sette i ponti di Königsberg?

Il problema (la cui risposta è no) è descritto mediante la questione dell'esistenza nel multigrafo

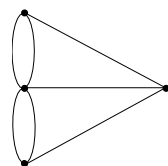


Figura 2.2: . . . il loro grafo.

di un circuito che attraversi (una ed una sola volta) tutti i lati del grafo, e non è che uno della sterminata famiglia di "tracciare un certo disegno senza staccare la matita dal foglio né ripassare sopra a tratti già disegnati". Nella prima parte di questo capitolo vedremo la soluzione generale data da Eulero che, come abbiamo accennato, segna la nascita della teoria matematica dei grafi. Nella seconda parte considereremo un problema apparentemente simile ma molto più difficile; anch'esso ha una data di nascita precisa, il 1859, quando sir William Rowan Hamilton propose (e, pare, cercò anche di commercializzare) il seguente rompicapo:

Problema del viaggiatore sul dodecaedro. Ai venti vertici di un dodecaedro regolare sono assegnati i nomi di altrettante città famose. È possibile per un viaggiatore che parta da un dato vertice-città, toccare una e una sola volta tutte le città, viaggiando lungo degli spigoli del dodecaedro, e facendo alla fine ritorno alla città di partenza ?

Il problema si traduce in termini di grafi (cosa che lo stesso Hamilton suggerì) nel modo seguente: esiste un circuito semplice nel grafo del dodecaedro (vedi Figura 1.7) che passa (una ed una sola volta) per tutti i vertici del grafo? (la risposta è sì).

Anche la terza sezione di questo capitolo può essere introdotta ricordando un altro vecchio e ben noto rompicapo:

Problema dei villaggi e dei pozzi. Gli abitanti di tre villaggi attingono acqua da tre pozzi situati ad una certa distanza da tutti e tre i villaggi. A causa di ricorrenti siccità, un antico accordo stabilisce che ognuno dei villaggi possa utilizzare tutti e tre i pozzi, e quindi da ogni villaggio partono tre sentieri che arrivano a ciascuno dei pozzi. La situazione è dunque schematizzata dal seguente grafo:

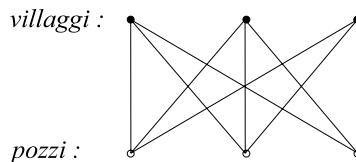


Figura 2.3: villaggi e pozzi.

Col tempo si è però sviluppata un'inimicizia tra le tre comunità, per cui possono verificarsi incidenti qualora abitanti di diversi villaggi si incontrino negli incroci tra i sentieri. Un antropologo europeo, giunto da quelle parti, e compiaciuto di poter risolvere tanto facilmente (grazie alla propria cultura superiore) il problema di quei bravi selvaggi, propone allora agli anziani dei tre villaggi di tracciare nuovi sentieri che non si incontrino se non in prossimità dei pozzi (luoghi sacri e quindi sicuri). Gli anziani lo fissano accondiscendenti per qualche secondo e, quindi, scoppiano a ridere. Perché?

Qui, la questione (la cui risposta è no, come sapevano gli anziani) è se il grafo di sopra possa essere disegnato in modo che i nove lati non si intersechino in alcun punto (ad eccezione, ovviamente, dei vertici).

2.1 Cammini e grafi euleriani.

Sia $\Gamma = (V, E)$ un grafo. Un cammino $v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \dots e_m v_m$ in Γ si dice **euleriano** se l'insieme dei lati che lo compongono è tutto E (ovvero se $\{e_1, \dots, e_m\} = E$; ricordiamo che i lati che compongono un cammino sono tutti distinti). Similmente, un circuito si dice euleriano se l'insieme dei lati che lo compongono è tutto E . Un grafo in cui esiste un circuito euleriano si chiama **grafo euleriano**.

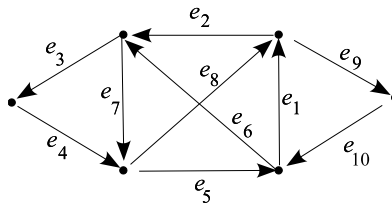


Figura 2.4: un circuito euleriano.

Ora, così come quello di grado, anche concetti di cammino e circuito possono essere estesi senza difficoltà al caso dei multigrafi (ed anche, ma questo qui non lo faremo, a quello degli pseudografi), ed è questa la ragione per cui la definizione di cammino richiede che vengano esplicitamente elencati i lati (in un grafo ciò non è strettamente necessario, dato che tra due vertici di un grafo c'è al più un lato). Si può quindi, con la

stessa definizione, parlare di cammini e circuiti euleriani in un multigrafo. Il problema dei ponti di Königsberg è dunque quello dell'esistenza di un circuito euleriano nel grafo di Figura 2.2. Ecco la risposta di Eulero.

Teorema 2.1. (Eulero). *Un multigrafo Γ privo di vertici isolati ha un circuito euleriano se e soltanto se è connesso e ogni suo vertice ha grado pari.*

DIMOSTRAZIONE. Sia Γ un multigrafo privo di vertici isolati.

Se Γ ha un circuito euleriano è ovvio che Γ è connesso. Inoltre, per ciascun vertice v , un fissato circuito euleriano di Γ attraversa una ed una sola volta tutti i lati incidenti a v ; poiché ogni volta che il circuito tocca v deve arrivare e uscire per due lati distinti (se v è il vertice iniziale, il circuito inizia e si chiude in v con due lati diversi), si conclude che il grado di v è pari.

Viceversa, supponiamo che Γ sia connesso e che tutti i suoi vertici abbiano grado pari. Proviamo che Γ ha un circuito euleriano per induzione sul numero m di lati di Γ (osserviamo che $m \geq 2$). Se $m = 2$, allora Γ è un multigrafo costituito da due vertici connessi da due lati, e quindi ammette banalmente un cammino euleriano. Sia $m \geq 3$. Allora, poiché ogni vertice di Γ ha grado almeno 2, Γ non è un albero (se Γ fosse un albero, non avrebbe alcun lato multiplo e quindi, per il Lemma 1.4, avrebbe dei vertici di grado 1); quindi Γ ammette dei circuiti. Sia \mathcal{C} un circuito di Γ con il massimo numero possibile di lati e supponiamo, per assurdo, che \mathcal{C} non sia euleriano (cioè che non comprenda tutti i lati di Γ). Allora, il grafo $\Gamma - \mathcal{C}$, ottenuto da Γ togliendo tutti i lati di \mathcal{C} , non è formato da soli vertici isolati, e ha pertanto una componente connessa Δ non banale. Ora, poiché nel ricavare $\Gamma - \mathcal{C}$ abbiamo tolto i lati di un circuito, e dunque per ciascun vertice v di Γ , abbiamo tolto un numero pari (eventualmente zero) di lati incidenti a v , ne segue in particolare che in Δ tutti i vertici hanno grado pari e quindi, per ipotesi induttiva, esiste un circuito euleriano \mathcal{D} in Δ . Ora, siccome Γ è connesso, almeno un vertice a del circuito \mathcal{C} appartiene a Δ (e quindi compare in \mathcal{D}). Ora, percorrendo il circuito \mathcal{C} , a partire da un suo vertice qualsiasi, sino al vertice a , poi percorrendo tutto \mathcal{D} fino a tornare ad a , e quindi riprendendo il tratto non ancora percorso di \mathcal{C} , si ottiene un circuito in Γ (dato che i lati di Δ , e quindi quelli che formano \mathcal{D} , non compaiono in \mathcal{C}) di lunghezza maggiore di \mathcal{C} , e questo va contro la scelta di \mathcal{C} . Pertanto \mathcal{C} è un circuito euleriano. ■

Un semplice adattamento della dimostrazione precedente consente di completare il risultato di Eulero al caso dei cammini euleriani.

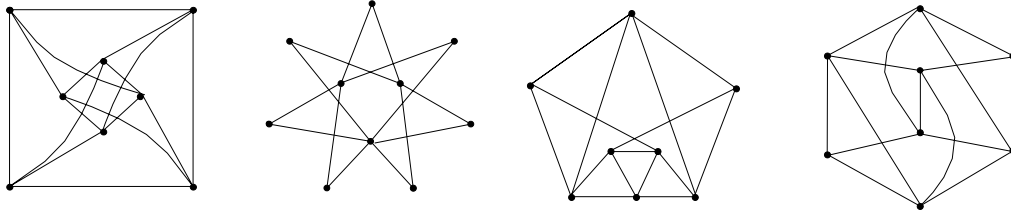
Teorema 2.2. *Un multigrafo Γ privo di vertici isolati ha un cammino euleriano non chiuso se e soltanto se è connesso e ha due vertici dispari. Nel caso Γ abbia due vertici dispari u e v , allora tutti i cammini euleriani di Γ iniziano e terminano in u e v .*

DIMOSTRAZIONE. Esercizio. (suggerimento: se u e v sono i due vertici dispari, aggiungere al grafo un nuovo vertice a e i due lati $\{a, u\}$ ed $\{a, v\}$, quindi applicare il Teorema precedente.) ■

Come prima applicazione di questi risultati, osserviamo che un grafo regolare k -valente è euleriano se e soltanto k è pari. In particolare il grafo completo K_n (che è regolare di grado $n - 1$) è euleriano se e solo se n è dispari. Se n è pari, togliendo opportunamente $n/2$ lati (ad esempio, se K_n è disegnato sui vertici di un n -agono regolare, si possono

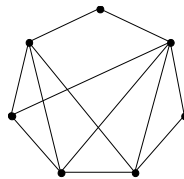
togliere uno si e uno no i lati del perimetro) si ottiene un grafo euleriano. Quindi, se n è pari K_n ha un circuito di lunghezza $\binom{n}{2} - \frac{n}{2} = \frac{n(n-2)}{2}$; si provi che, per n pari, questa è la massima lunghezza di un circuito di K_n .

Esercizio 2.1. Si dica quali tra i seguenti grafi ammette un circuito euleriano, e in tali casi si trovi esplicitamente un tale circuito. Nei rimanenti casi si dica qual è la massima lunghezza di un circuito percorribile nel grafo.



Esercizio 2.2. Sia $\Gamma = (V, E)$ un grafo connesso euleriano, e sia $v \in V$. Si consideri il grafo $\Gamma - v = (V \setminus \{v\}, E')$, dove E' è ottenuto togliendo da E i lati incidenti a v . Si provi che $\Gamma - v$ è connesso, che non ha circuiti euleriani, e che ha cammini euleriani se e solo se $d_\Gamma(v) = 2$.

Esercizio 2.3. Qual è il minimo numero di lati che è necessario aggiungere al seguente grafo per ottenere un grafo euleriano?

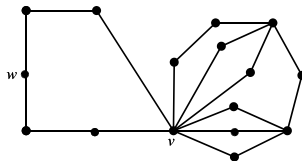


Esercizio 2.4. È possibile tracciare una (e una sola) diagonale su ogni faccia di un cubo in modo che il grafo che si ottiene (i vertici sono quelli del cubo, ed i lati gli spigoli del cubo e le diagonali aggiunte) sia euleriano?

Esercizio 2.5. Sia $n \geq 2$, e siano Γ e Γ' due grafi completi su n vertici. Supponiamo che i due insiemi di vertici siano disgiunti: $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ l'insieme dei vertici di Γ , e $V' = \{v'_1, v'_2, \dots, v'_n\}$ quello dei vertici di Γ' . Sia $\Delta_n = (V, E)$ il grafo definito nella maniera seguente: $V = V \cup V'$ ed E è costituito da tutti i lati di Γ e di Γ' con l'aggiunta dei lati del tipo $\{v_i, v'_i\}$, con $i = 1, 2, \dots, n$. Si dica per quali valori di n il grafo Δ_n è euleriano.

Digressione: un museo ideale? Il piano di un museo o di una esposizione può facilmente essere rappresentato mediante un grafo, i cui lati sono le varie gallerie o corridoi del museo, ed i vertici sono le congiunzioni di due o più gallerie. Un visitatore che sia interessato a esaminare l'intera collezione dovrà percorrere almeno una volta tutte le gallerie del museo (lati del grafo), e presumibilmente preferirà percorrerne ciascuna soltanto una volta. In termini del grafo sopra descritto, ciò è possibile se e soltanto se esso ammette un cammino euleriano tra i vertici corrispondenti all'entrata ed all'uscita del museo; nel caso in cui l'entrata e l'uscita coincidano, se e solo se si tratta di un grafo euleriano. In tal caso, la direzione del museo potrebbe fornire una mappa con l'indicazione del circuito euleriano. Ma se tali mappe fossero momentaneamente esaurite, quello che il nostro visitatore auspicherebbe è di poter comunque effettuare una visita

”euleriana” mediante la semplice strategia di scegliere casualmente una nuova galleria (lato del grafo) ad ogni congiunzione (vertice) con la sola condizione che questa non sia già stata percorsa in precedenza. Naturalmente, ciò è possibile solo se il grafo del museo gode di proprietà piuttosto forti; ed è quello che talvolta viene chiamato un grafo casualmente euleriano (si tratta della solita pessima traduzione dell’inglese *randomly eulerian graph*). Più precisamente, se Γ è un grafo e v un suo vertice, Γ si dice *casualmente euleriano* per v se ogni circuito massimale di Γ che includa il vertice v è un circuito euleriano (ci si convinca che questa definizione, posto v il vertice di entrata-uscita del museo, è equivalente a quella più ”operativa” data di sopra). La figura seguente è un esempio di grafo casualmente euleriano per v .



Va da sé che alla sua inaugurazione, e indipendentemente dal suo contenuto, un museo il cui schema di gallerie fosse un grafo casualmente euleriano sarebbe senz’altro tacciato come ”ideale” dal politico di turno, e dai telegiornalisti più avveduti. Per ulteriori informazioni sui grafi casualmente euleriani si cerchi tra gli esercizi alla fine del capitolo.

2.2 Cicli e grafi hamiltoniani.

Sia $\Gamma = (V, E)$ un grafo. Un cammino $v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \dots e_n v_n$ in Γ si dice **hamiltoniano** se è semplice e l’insieme dei vertici che lo compongono è tutto V (ovvero se $\{v_0, v_1, \dots, v_n\} = V$). Un cammino hamiltoniano è quindi un cammino che tocca una ed una sola volta tutti i vertici del grafo. Similmente, un circuito di Γ si dice hamiltoniano se è semplice (cioè è un ciclo) e l’insieme dei vertici che lo compongono è tutto V . Un grafo in cui esiste un ciclo hamiltoniano si chiama **grafo hamiltoniano**.

In altre parole, un grafo con n vertici è hamiltoniano se e solo se contiene un sottografo isomorfo al ciclo C_n .

Il grafo con 10 vertici della figura 1.12 è hamiltoniano (si trovi in esso un ciclo hamiltoniano), mentre il grafo di Petersen non lo è (e questo prova in particolare che i due grafi non sono isomorfi).

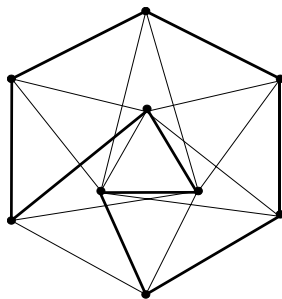


Figura 2.5: un ciclo hamiltoniano.

Mentre è facile implementare un programma efficiente (qualsiasi cosa questo ragionevolmente significhi) che, utilizzando il teorema 2.1, stabilisce se un grafo è euleriano, in generale decidere se un dato grafo ammetta un ciclo (o anche un cammino) hamiltoniano è un problema molto più difficile (provare con il grafo di Petersen); non si conosce alcuna caratterizzazione dei grafi hamiltoniani del tipo di quella vista per i grafi euleriani, né si sa che non esiste (anche se la cosa è improbabile: per chi ha un poco di dimestichezza con la teoria della complessità, citiamo che è stato dimostrato che il problema di decidere se un grafo è hamiltoniano è NP-completo).

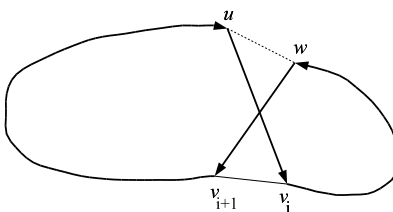
Questa questione ha da sempre attirato l'interesse di diversi studiosi, e sono stati ottenuti vari risultati i quali assicurano che, sotto condizioni di solito abbastanza specifiche, certi grafi sono (o non sono) hamiltoniani. Uno dei più semplici è il seguente, dovuto a O. Ore (1960). Prima di enunciarlo, osserviamo che, banalmente, ogni grafo completo è hamiltoniano.

Teorema 2.3. (Ore). *Sia Γ un grafo con n vertici e tale che per ogni coppia di vertici v, w non adiacenti si ha $d_\Gamma(v) + d_\Gamma(w) \geq n$. Allora Γ è hamiltoniano.*

DIMOSTRAZIONE. Sia Γ un grafo con n vertici che soddisfa all'ipotesi del Teorema. Se $n = 1$ non c'è nulla da provare (osserviamo che un grafo con un solo vertice, o più in generale un qualsiasi grafo completo, soddisfa la condizione dell'enunciato, dato che *non ci sono* coppie di vertici non adiacenti). Supponiamo quindi $n \geq 2$, e procediamo per induzione sul numero t di coppie (non ordinate) di vertici non adiacenti di Γ . Se $t = 0$ allora Γ è un grafo completo e dunque, per quanto osservato sopra, ammette un cammino hamiltoniano. Sia quindi $t \geq 1$. Allora esistono in Γ due vertici non adiacenti u e w . Consideriamo il grafo Γ' ottenuto da Γ aggiungendo il lato $e = \{u, w\}$. Chiaramente Γ' , che ha lo stesso numero di vertici di Γ e un lato in più, soddisfa le ipotesi del teorema. Ora, Γ' ha una coppia in meno di vertici non adiacenti, e dunque, per ipotesi induttiva, esiste un ciclo hamiltoniano \mathcal{C} di Γ' . Poiché Γ' ha gli stessi vertici di Γ , se \mathcal{C} non contiene il lato aggiunto e , allora è un ciclo hamiltoniano anche di Γ . Supponiamo quindi che il lato $e = e_1$ appartenga al ciclo \mathcal{C} . Il resto del ciclo, $w = v_1 e_2 v_2 \dots v_{n-1} e_n v_n = u$, è un cammino hamiltoniano in Γ . Poniamo

$$A = \{ v_i \mid 1 \leq i \leq n, u \text{ è adiacente in } \Gamma \text{ a } v_i \}$$

$$B = \{ v_i \mid 1 \leq i \leq n - 1, w \text{ è adiacente in } \Gamma \text{ a } v_{i+1} \}.$$



Poiché $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ è l'insieme di tutti i vertici di Γ , si ha $|A| = d_\Gamma(u)$, $|B| = d_\Gamma(w)$. Quindi, per ipotesi, $|A| + |B| \geq n$. Ora, $u \notin A \cup B$, e dunque

$$|A \cup B| \leq n - 1 < |A| + |B|.$$

Da ciò segue $A \cap B \neq \emptyset$. Sia $v_i \in A \cap B$; allora $\{w, v_{i+1}\}$ e $\{u, v_i\}$ sono lati di Γ .

Partendo da w , facendo seguire il lato $\{w, v_{i+1}\}$, percorrendo poi il circuito \mathcal{C} da v_{i+1} fino ad u , quindi facendo seguire il lato $\{u, v_i\}$, ed infine percorrendo \mathcal{C} a ritroso da v_i a w (vedi figura) si ottiene un ciclo hamiltoniano di Γ . ■

Il Teorema di Ore è un raffinamento di un celebre risultato di G. Dirac (1954), che possiamo ricavare come immediato corollario.

Corollario 2.4. *Sia Γ un grafo su n vertici e tale che $d_\Gamma(v) \geq n/2$ per ogni vertice v . Allora Γ è hamiltoniano.*

Per citare (senza dimostrarlo) un esempio di un risultato più recente, ma di simile natura, peschiamo più o meno dal mazzo un bel teorema di B. Jackson (1980). Un grafo si dice 2-connesso se ogni coppia di vertici distinti appartiene a qualche ciclo del grafo.

Teorema 2.5. (Jackson) *Sia Γ un grafo 2-connesso regolare d -valente, con n vertici. Se $d \geq n/3$ allora Γ è hamiltoniano.*

Osserviamo che il grafo di Petersen è regolare 3-valente e 2-connesso, ma non è hamiltoniano, e verifica $d = (n - 1)/3$. Chiaramente, la 2-connessione è una condizione necessaria per l'esistenza di un ciclo hamiltoniano; il seguente esempio è un grafo regolare 4-valente con $n = 11$ vertici (che soddisfa quindi $d \geq n/3$) ma che non è 2-connesso:

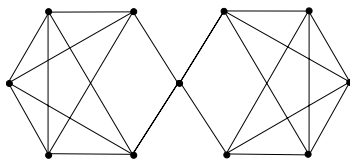
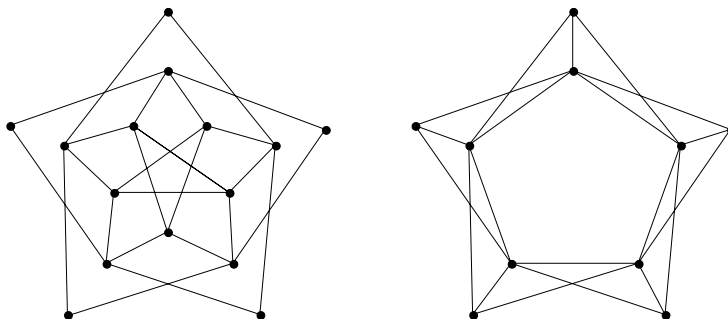


Figura 2.6: un grafo regolare non 2-connesso.

Esercizio 2.6. Si provi che il grafo del dodecaedro è hamiltoniano. Si provi che il grafo al punto 1) dell'esercizio 1.1 è hamiltoniano. Si provi che il grafo di Petersen non è hamiltoniano (si osservi che il terzo esempio della Figura 1.9 mostra che il grafo di Petersen contiene un ciclo di lunghezza 9).

Esercizio 2.7. Si dica, motivando le risposte, quali tra i seguenti grafi sono hamiltoniani.



Esercizio 2.8. Si dica quali tra i grafi B_n definiti nell'esercizio 1.13 sono euleriani. Provare che B_n è hamiltoniano se e soltanto se n è pari.

Esercizio 2.9. Sia Γ un grafo con n vertici e sia $\kappa = \kappa(\Gamma)$ la lunghezza massima di un cammino semplice di Γ . Si provi che aggiungendo a Γ al più $n - \kappa$ opportuni lati si ottiene un grafo hamiltoniano (si faccia induzione su $n - \kappa$).

Esercizio 2.10. Costruire un grafo connesso regolare 3-valente con 10 vertici e privo di circuiti hamiltoniani che non sia isomorfo al grafo di Petersen.

Digressione: il problema del commesso viaggiatore. Il viaggiatore ottocentesco, un po' astratto e libero dalla necessità di lavorare, di sir W. R. Hamilton, e che immaginiamo nella biblioteca di palazzo, avvolto nella sua più comoda veste da camera, con un bicchierino di sherry in mano, serenamente intento a programmare il suo *grand tour* contemplando un mappamondo dodecaedrico, è oggi diventato un *commesso viaggiatore*.

Egli deve visitare in successione, e tornando alla fine al punto di partenza, un certo numero n di città, e intende (o è tenuto a) eseguire il proprio compito con la minore spesa possibile (in tempo, o in denaro, o rispettivamente a qualsiasi parametro quantificabile che può essere inteso come "prezzo da pagare"). Quindi valuta inizialmente, per ogni coppia di città distinte, il costo del trasferimento da una all'altra (che per semplicità assumiamo non dipendere dal verso di percorrenza). La situazione si rappresenta mediante un grafo completo su n vertici (il numero di città) in cui ad ogni lato è assegnato un costo (o *peso*); ed il problema del commesso viaggiatore è quello di come in modo efficiente decidere, tra tutti i circuiti che toccano tutti i vertici, uno di peso totale minimo. Se assumiamo che il commesso viaggiatore non possa ripassare per una città già visitata (se non per tornare alla fine a quella di partenza), il problema è quindi quello di trovare, in un grafo completo i cui lati sono pesati, un circuito hamiltoniano di peso totale minimo. Questo problema contiene quello di stabilire se un dato grafo Γ sia hamiltoniano. Infatti, si aggiungono a Γ tutti i lati che congiungono vertici di esso non adiacenti, in modo da ottenere un grafo completo sullo stesso insieme di vertici; quindi si assegna un peso 0 ai lati originari di Γ ed un peso 1 a quelli aggiunti. Γ è hamiltoniano se e solo se esiste, nel grafo completo che lo estende, un circuito hamiltoniano di peso totale 0.

Per quanto abbiamo riferito a proposito dei grafi hamiltoniani, è quindi chiaro che il problema del commesso viaggiatore è, allo stato attuale, intrattabile. Ribadiamo che la questione non è quella dell'esistenza di un algoritmo che determini un ciclo hamiltoniano di peso minimo, ma quella dell'esistenza di un algoritmo "efficiente". Non è nostro compito discutere qui e definire con maggior precisione cosa si intenda per efficienza di un algoritmo; ma proviamo a darne un'idea dicendo perché l'algoritmo ovvio non è efficiente. L'algoritmo "ovvio" consiste nel considerare tutti i possibili cicli hamiltoniani del grafo completo (ce n'è un numero finito, dato che il numero di vertici è finito), calcolare il peso totale di ognuno, e scegliere quello di peso minimo. Ora, è chiaro che in un grafo completo K_n su n vertici, ogni sequenza degli n -vertici (in cui ciascuno compare una ed una sola volta) è la sequenza dei vertici di un ciclo hamiltoniano (che si chiude al primo vertice della sequenza); se fissiamo il vertice iniziale v_1 dei cicli, c'è quindi una corrispondenza biunivoca tra i cicli hamiltoniani in K_n e i modi per disporre i rimanenti $n - 1$ vertici. Dunque il numero di cicli hamiltoniani in K_n è pari al numero di permutazioni degli $n - 1$ vertici diversi da v_1 , quindi è $(n - 1)!$. Il nostro algoritmo "ovvio" richiede pertanto un numero di passi che cresce, al crescere del numero n di vertici, come $n!$, e quindi diventa rapidamente un numero intrattabile per qualsiasi elaboratore. Una delle richieste ragionevoli affinché un algoritmo sia considerato (almeno dal punto di vista teorico) efficiente, è che il numero complessivo di operazioni necessarie a produrre un output sia limitato in modo polinomiale rispetto ai parametri in input. Nel nostro caso, un algoritmo è efficiente se esiste una costante intera c , tale che il numero totale di operazioni è limitato da n^c , dove n è il numero di vertici del grafo che si pone in input.

L'algoritmo greedy per spanning-tree minimali è in questo senso efficiente. Partendo da un grafo con n -vertici, si devono trovare gli $n - 1$ lati di uno spanning-tree minimale; quindi il numero di passi è $n - 1$. Ciascun passo richiede di scegliere un lato tra un numero di essi che non supera

$\binom{n}{2} = \frac{1}{2}(n^2 - n)$, che abbia peso minimo tra quelli che godono di una certa proprietà; una volta che si sia definito per bene (ma non lo facciamo) cosa si intenda per "singola operazione", non è difficile vedere che questa procedura di scelta richiede un numero di operazioni che è limitato da un polinomio in n . Complessivamente, quindi, il numero totale di operazioni richieste per l'algoritmo per spanning-tree minimali, è limitato da un polinomio in n .

Nel caso del problema del commesso viaggiatore, non è ancora stato trovato (né è stato provato che non esiste) un algoritmo deterministico che sia "migliore" di quello ovvio (sia detto in senso teorico: è intuibile come siano stati proposti diversi accorgimenti che, per grafi non troppo grandi, funzionano da un punto di vista pratico molto meglio dell'algoritmo ovvio). Si tratta di una questione che, se risolta (in positivo o in negativo) avrebbe comunque delle conseguenze (teoriche e pratiche) di estrema importanza.

L'esempio della figura 2.7 dovrebbe perlomeno convincere che un algoritmo di tipo greedy non funziona: i lati disegnati all'interno hanno tutti peso 1, mentre quelli sul perimetro hanno il peso indicato dal numero accanto; c'è un solo ciclo hamiltoniano di peso minimo, che è quello che utilizza tutti e soli i lati che formano la stella interna, ed ha peso 5: in questo caso la scelta "greedy" si rivelerebbe sbagliata sin dal primo passo.

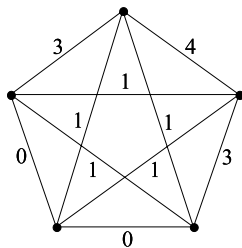


Figura 2.7: il grafo K_5 con pesi.

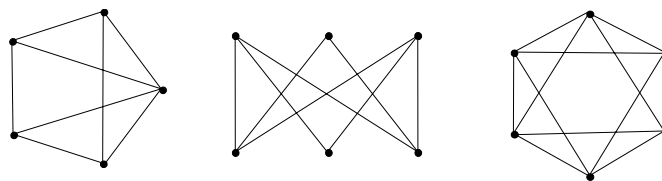
Vista la difficoltà del problema generale, un approccio alternativo è quello di cercare algoritmi efficienti che trovino soluzioni "approssimate" (non specificiamo in che senso), oppure che "con buona probabilità" trovino un ciclo di peso minimo. Ma anche qui ci fermiamo.

2.3 Grafi piani.

Un grafo si dice **piano** (o **planare**) se può essere disegnato su un piano in modo che le linee che rappresentano i suoi lati non si intersecano.

Per esempio, lo schema di un circuito stampato è quello di un grafo planare, a differenza dello schema di un circuito realizzato mediante cavi isolati (i quali si possono sovrapporre) che potrebbe non esserlo. I grafi dei poliedri regolari sono planari (si guardino i disegni della Figura 1.7). Più in generale ogni grafo che può essere disegnato su una sfera senza che i lati si incrocino (come senz'altro può essere fatto per i poliedri regolari, o per il grafo del pallone da calcio) è planare: per convincersene basta immaginare di tagliare la sfera in un punto che non appartenga al diagramma del grafo disegnato su di essa e quindi di "aprirla"; oppure, più scientificamente, si proietta stereograficamente la sfera, a partire da un punto di essa che non appartiene al diagramma, su un piano tangente al punto opposto. Come ultimo esempio osserviamo che ogni albero è planare (lo si dimostri per bene facendo induzione sul numero dei suoi vertici).

È importante sottolineare che la proprietà di essere planare è una proprietà che riguarda il grafo, e non un suo particolare disegno; ad esempio i grafi



sono piani, dato che possono, nello stesso ordine, essere disegnati nella maniera seguente:

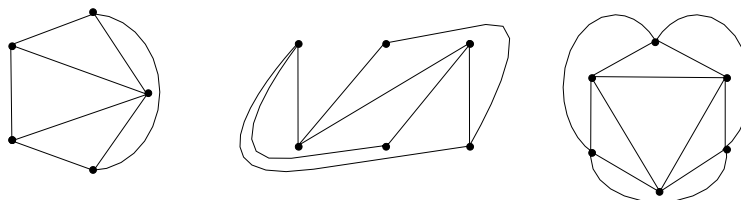


Figura 2.8: esempi di grafi piani.

Come tra poco proveremo, rappresentanti particolarmente significativi della classe dei grafi non planari sono il grafo completo K_5 ed il grafo dei villaggi e dei pozzi $K_{3,3}$ (il cui nome ufficiale è *grafo completo bipartito* di tipo $(3,3)$).

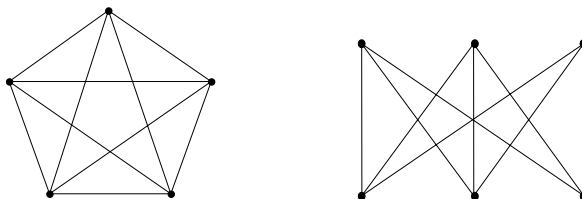


Figura 2.9: grafi non planari.

Il disegno di un grafo su un piano è formato da un insieme finito di punti, corrispondenti ai vertici del grafo, e da curve semplici che congiungono punti i cui vertici corrispondenti sono uniti da un lato del grafo. Avvisiamo che, nel trattarli come degli oggetti geometrici, o meglio topologici, tralascieremo di definire in modo rigoroso cosa siano i disegni di un grafo sul piano, e accoglieremo in modo intuitivo il concetto di curva semplice. Tuttavia non possiamo fare a meno di citare il famoso Teorema di Jordan sulle curve semplici chiuse, il cui enunciato è intuitivo, ma la cui dimostrazione è tutt'altro che banale.

Teorema della curva di Jordan. *Ogni curva semplice chiusa sul piano separa il piano in due regioni semplicemente connesse, una interna ed una esterna.*

Una conseguenza di questo Teorema è che, dato un disegno planare di un grafo in cui le curve dei lati non si intersecano, il piano risulta suddiviso in un numero finito di regioni connesse, chiamate le **facce** del disegno (e, per estensione, del grafo), di cui una di area infinita (la regione "esterna") e le altre limitate e racchiuse da un perimetro costituito da un numero finito di curve, corrispondenti ai lati di un ciclo del grafo (naturalmente, anche la faccia infinita esterna è delimitata allo stesso modo da quello che chiameremo ugualmente il suo perimetro).

Accettato questo, la dimostrazione del risultato (anche questo dovuto a Eulero) che sta alla base di tutta la teoria dei grafi piani è sorprendentemente breve.

Teorema 2.6. (Eulero) *Sia Γ un grafo piano connesso con n vertici e m lati e , in un suo disegno planare, sia c il numero delle facce. Allora*

$$c - m + n = 2.$$

DIMOSTRAZIONE. Per induzione sul numero m di lati. Se $m = 0$ allora Γ è un unico vertice, $c = 1$ e la formula è banalmente soddisfatta. Lo stesso avviene se Γ è un albero; in tal caso, infatti, un disegno planare di Γ ha un'unica faccia, e per il Teorema 1.5 si ha $m = n - 1$, quindi $c - m + n = 1 - (n - 1) + n = 2$. Se Γ non è un albero, allora ha un circuito \mathcal{C} . Per il Teorema della curva di Jordan, \mathcal{C} divide il piano in una regione interna ed una esterna; quindi, se e è un lato di \mathcal{C} , e separa esattamente due facce di Γ , una che giace nella regione interna di \mathcal{C} e l'altra in quella esterna. Nel disegno del sottografo $\Gamma - e$ queste due regioni vengono 'fuse' in una. Pertanto, il numero di facce nel disegno del sottografo $\Gamma - e$ è $c - 1$. D'altra parte, $\Gamma - e$ è connesso, ha gli stessi vertici di Γ ed un lato in meno; quindi, per ipotesi induttiva

$$2 = (c - 1) - (m - 1) + n = c - m + n$$

provando così il Teorema. ■

Come prima applicazione, vediamo come da questo risultato discenda subito una forte limitazione al numero dei lati di un grafo piano.

Teorema 2.7. *Sia m il numero di lati di un grafo piano con $n \geq 2$ vertici. Allora $m \leq 3n - 6$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia Γ un grafo piano. Se Γ non è connesso, l'aggiungere un nuovo lato i cui estremi appartengono a componenti connesse distinte dà chiaramente luogo ancora ad un grafo piano, con gli stessi vertici di Γ ed un lato in più. Ai fini di provare la limitazione dell'enunciato, possiamo perciò assumere che Γ sia connesso, e quindi che valga il Teorema di Eulero. A questo punto, l'argomento è analogo a quello utilizzato nella dimostrazione del teorema 1.1. Sia dato un disegno planare di Γ , e per ogni faccia α denotiamo con $d(\alpha)$ il numero di lati distinti che compongono il perimetro di α . Poiché ogni lato è parte del perimetro di esattamente due facce, si ha

$$\sum_{\alpha \text{ faccia}} d(\alpha) = 2m.$$

D'altra parte, il perimetro di ogni faccia è composto da almeno tre lati, ovvero $d(\alpha) \geq 3$ per ogni faccia α . Quindi l'uguaglianza di sopra implica la diseuguaglianza $3c \leq 2m$. Poiché per il Teorema di Eulero si ha $c = m - n + 2$, si ottiene

$$3(m - n + 2) \leq 2m$$

da cui segue subito la diseuguaglianza dell'enunciato. ■

Corollario 2.8. *Un grafo piano ha almeno un vertice di grado al più 5.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\Gamma = (V, E)$ un grafo piano con n vertici e m lati, e supponiamo per assurdo che ogni vertice abbia grado almeno 6. Allora, per il Teorema 1.1

$$6n \leq \sum_{v \in V} d_{\Gamma}(v) = 2m$$

e quindi $m \geq 3n$, cosa che contraddice il Teorema 2.7. ■

Osserviamo ora che il grafo completo K_5 non soddisfa la limitazione del Teorema 2.7 (ha 10 lati e 5 vertici), e quindi non è piano. Invece il grafo $K_{3,3}$ (quello dei villaggi e dei pozzi: 9 lati e 6 vertici) soddisfa la limitazione del Teorema. Tuttavia possiamo adattare la dimostrazione di quest'ultimo per provare che anche $K_{3,3}$ non è piano. Infatti, $K_{3,3}$ non contiene triangoli (cicli di lunghezza 3) e quindi ogni faccia di un suo eventuale disegno piano ha un perimetro con almeno 4 lati (si osservi: inclusa la faccia infinita). Ora, ripetendo l'argomento della dimostrazione del teorema 2.7, si ha che, se n , m e c sono rispettivamente il numero dei vertici, di lati e di facce di un disegno piano di un grafo privo di triangoli, allora $4c \leq 2m$, e quindi, per il Teorema di Eulero, $m \leq 2n - 4$ (questa idea verrà generalizzata nell'esercizio 2.12). Poiché $K_{3,3}$ non verifica questa seconda limitazione, concludiamo che esso non è un grafo piano. Quindi

Proposizione 2.9. *I grafi completi K_5 e $K_{3,3}$ non sono piani.*

Chiaramente, ogni sottografo di un grafo piano è piano; dunque un grafo che ha un sottografo isomorfo a K_5 o a $K_{3,3}$ non è piano. Si può dire di più. Sia $e = \{u, v\}$ un lato del grafo Γ ; possiamo generare un grafo Γ^e aggiungendo a Γ un nuovo vertice a , togliendo il lato e , e rimpiazzandolo con i due lati $\{u, a\}$, $\{a, v\}$. Dato un disegno di Γ , per ottenere un disegno di Γ^e si utilizzano le stesse linee, e semplicemente si aggiunge un vertice in mezzo alla linea che rappresenta e nel disegno di Γ ; quindi Γ è piano se e soltanto se Γ^e è piano. Un grafo Γ' è detto una *suddivisione* del grafo Γ se è ottenuto da Γ mediante un numero finito di applicazioni successive della procedura appena descritta (si veda un esempio in figura 1.10). Pertanto Γ è piano se e solo se ogni sua suddivisione è tale. Inoltre, un grafo che ha un sottografo isomorfo ad una suddivisione di K_5 o di $K_{3,3}$ non è piano.

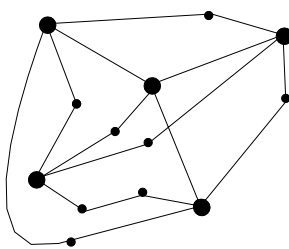


Figura 2.10: una suddivisione di K_5 .

Un importante risultato di Kuratowski, la cui dimostrazione, pur non richiedendo strumenti particolarmente sofisticati, è troppo complicata per essere affrontata in queste note, afferma che vale anche il viceversa.

Teorema 2.10. (Kuratowski) *Un grafo è piano se e soltanto se non ha sottografi isomorfi ad una suddivisione di K_5 o di $K_{3,3}$.*

Esercizio 2.11. Dire quali tra i grafi dell'esercizio 2.1 sono planari.

Esercizio 2.12. Sia g la lunghezza minima di un ciclo non banale di un grafo piano (che non sia un albero) con n vertici, m lati e c facce. Si provi che

$$m \leq \frac{g}{g-2}(n-2) \quad \text{e} \quad c \leq \frac{2}{g-2}(n-2).$$

Esercizio 2.13. Sia Γ un grafo piano con $n \geq 2$ vertici e m lati, e si supponga che $m < 3n - 6$. Provare che è possibile aggiungere un lato a Γ in modo che il grafo che si ottiene è ancora planare.

Esercizio 2.14. Un grafo piano si dice *massimale* se non è possibile aggiungervi alcun nuovo lato e ottenere ancora un grafo piano. Sia Γ un grafo piano con $n \geq 2$ vertici, m lati e c facce.

- 1) Provare che Γ è massimale se e soltanto se una delle due seguenti uguaglianze è soddisfatta: i) $m = 3n - 6$; ii) $c = 2n - 4$.
- 2) Assumendo che Γ sia massimale e regolare di grado 5, trovare n , m e c .
- 3) Provare che il grafo dell'icosaedro è piano massimale.

Esercizio 2.15. Per ogni $n \geq 2$ costruire un grafo piano massimale con n vertici. Costruire due grafi piani massimali con 6 vertici che non siano isomorfi.

2.4 Grafi regolari.

Ricordiamo che un grafo Γ si dice *regolare* se i suoi vertici hanno tutti lo stesso grado; se tale grado comune è uguale a d si dice che Γ è un grafo (regolare) d -valente. Sono, ad esempio, regolari tutti i grafi completi K_n ed i grafi dei poliedri regolari (figura 1.7).

È chiaro che un grafo è 1-valente se e soltanto se ogni sua componente connessa è composta da due vertici ed un solo lato (un grafo di questo tipo si chiama anche un *1-fattore*). Anche i grafi 2-valenti si descrivono facilmente: infatti un grafo connesso è 2-valente se e soltanto se è un ciclo (vedi esercizio 1.26, per dimostrarlo si provi ad esempio a considerare un cammino massimale in un grafo connesso 2-valente e che cosa se ne può dire). Dunque un grafo è 2-valente se e soltanto se ogni sua componente connessa è un ciclo.

Quindi, il primo caso significativo è quello dei grafi 3-valenti, che come è consuetudine chiameremo *grafi cubici*. Di fatto è molto più che un caso "significativo": la complessità della classe dei grafi cubici è notevole, ed è frequente che un problema difficile in teoria dei grafi rimanga difficile anche se ci si limita a considerare i grafi cubici. Esempi di grafi cubici sono i grafi del tetraedro, del cubo, del dodecaedro, e il grafo di Petersen.

Sia $\Gamma = (V, E)$ un grafo cubico; usando la formula del Teorema 1.1 si ottiene $3|V| = 2|E|$; in particolare il numero di vertici di un grafo cubico (o, più in generale, di un grafo regolare di valenza dispari) è pari. La figura 1.12 suggerisce come trovare, per ogni $n \geq 3$, un grafo cubico con $2n$ vertici. È stato calcolato che il numero di grafi cubici (a meno di isomorfismo) rispettivamente con 10, 12, 14 e 16 vertici è 21, 94, 540, 4207.²

²Il numero di grafi cubici è stato determinato fino a 40 vertici; i grafi cubici con 40 vertici sono circa 8×10^{18} . Sono cubici anche i grafi di alcune interessantissime molecole composte da atomi di carbonio, come i fullereni: assomigliano ai vecchi palloni da calcio, e potete vederle, ad esempio, al sito <http://www.sussex.ac.uk/Users/kroto/FullereneCentre/main.html>

Sia $v \in V$ un vertice del grafo connesso Γ , e sia $0 \leq q$ un numero intero; la *palla* $B_\Gamma(v, q)$ di raggio q e centro v è l'insieme di tutti i vertici di Γ la cui distanza da v non supera q ; ovvero

$$B_\Gamma(v, q) = \{w \in V \mid d_\Gamma(v, w) \leq q\}.$$

Quindi, $B_\Gamma(v, 0) = \{v\}$ e, se d è il grado di v , $B_\Gamma(v, 1)$ contiene esattamente $d + 1$ elementi.

Lemma 2.11. *Sia $\Gamma = (V, E)$ un grafo connesso regolare d -valente. Allora, per ogni $v \in V$ ed ogni $q \geq 1$*

$$|B_\Gamma(v, q)| \leq 1 + d \cdot \frac{(d-1)^q - 1}{d-2}.$$

In particolare, se Γ è cubico, $|B_\Gamma(v, q)| \leq 1 + 3(2^q - 1)$.

DIMOSTRAZIONE. Procedendo per induzione su q proviamo che il numero di vertici di Γ la cui distanza da v è esattamente q è al più $d(d-1)^{q-1}$.

Per $q = 1$ la cosa è ovvia, dato che v ha grado $d = d(d-1)^0$.

Sia $q \geq 2$. Osserviamo che ogni vertice la cui distanza da v è uguale a q è adiacente ad un vertice la cui distanza da v è uguale a $q-1$; inoltre ogni vertice w a distanza $q-1$ da v è adiacente ad almeno un vertice di distanza minore, e pertanto, avendo grado d , w può essere adiacente ad al più $(d-1)$ vertici di distanza q da v . Poiché il numero di vertici di distanza $q-1$ è, per ipotesi induttiva, minore o uguale a $d(d-1)^{q-2}$, si ricava che il numero di vertici a distanza q da v è al più $d(d-1)^{q-2}(d-1) = d(d-1)^{q-1}$, che è quello che si voleva.

A questo punto, siccome la palla $B_\Gamma(v, q)$ è costituita da tutti i vertici la cui distanza da v è compresa tra 0 e q , si ha

$$|B_\Gamma(v, q)| \leq 1 + d + d(d-1) + d(d-1)^2 + \dots + d(d-1)^{q-1} = 1 + d \cdot \frac{(d-1)^q - 1}{d-2}$$

che è l'enunciato del Lemma. ■

Un'immediata conseguenza è il seguente risultato. Ricordiamo che il diametro di un grafo è la massima distanza tra due vertici del grafo stesso.

Corollario 2.12. *Sia $\Gamma = (V, E)$ un grafo connesso regolare d -valente di diametro q . Allora,*

$$|V| \leq 1 + d \cdot \frac{(d-1)^q - 1}{d-2}.$$

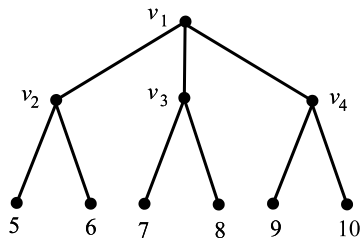
In particolare, un grafo regolare d -valente di diametro 2 ha al più $d^2 + 1$ vertici; e un grafo cubico di diametro q ha al più $1 + 3(2^q - 1)$ vertici.

Un grafo d -valente, di diametro q e $1 + d \cdot \frac{(d-1)^q - 1}{d-2}$ vertici si chiama *grafo di Moore* di diametro q e valenza d . Il ciclo C_5 è chiaramente l'unico grafo di Moore di diametro 2 e valenza 2.

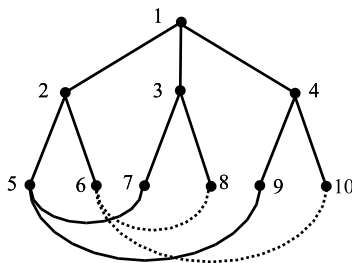
Proposizione 2.13. *Il grafo di Petersen è l'unico grafo di Moore cubico di diametro 2.*

DIMOSTRAZIONE. Si verifica direttamente che il grafo di Petersen è un grafo cubico di diametro 2; e poiché ha $10 = 3^2 + 1$ vertici, esso è un grafo di Moore. Viceversa, sia Γ un grafo di Moore cubico di diametro 2; allora Γ ha 10 vertici, che denotiamo con v_1, v_2, \dots, v_{10} , e ponendo che i vertici adiacenti al vertice v_1 siano quelli denotati con v_2, v_3, v_4 . Siccome Γ ha diametro 2,

considerando anche tutti i vertici adiacenti a qualcuno dei vertici v_2, v_3, v_4 , otteniamo tutti i vertici di Γ . Poiché ogni vertice v_2, v_3, v_4 ha esattamente 2 vertici adiacenti diversi dal vertice v_1 , e Γ ha 10 vertici si deduce che ogni vertice diverso da v_1, v_2, v_3, v_4 è adiacente ad uno e uno solo dei vertici v_2, v_3, v_4 . Abbiamo cioè la situazione illustrata dalla seguente figura.



Ora, poiché il vertice v_5 ha distanza 2 sia da v_3 che da v_4 , si avrà che v_5 è adiacente ad uno tra i vertici v_7, v_8 , e ad uno tra v_9, v_{10} ; eventualmente cambiando gli indici, possiamo supporre che v_5 sia adiacente a v_7 e a v_9 . Questo forza il vertice v_6 ad essere adiacente a v_9 e a v_{10} .



Ora, v_7 deve essere adiacente a v_9 oppure a v_{10} ; siccome v_7 deve avere distanza 2 da v_6 , l'unica possibilità è che v_7 sia adiacente a v_{10} ; conseguentemente, v_8 è adiacente a v_9 , e non vi siano altri lati in Γ . A questo punto si verifica facilmente che Γ è isomorfo al grafo di Petersen. ■

Si può dimostrare (e forse lo faremo più avanti) che un grafo di Moore di valenza d e diametro 2 può esistere solo se $d = 2, 3, 7, 57$. Come per $d = 2$ (il ciclo C_5) e per $d = 3$ (il grafo di Petersen), si può anche provare che esiste un unico grafo di Moore con valenza $d = 7$ e diametro 2 (e 50 vertici); mentre non è tuttora noto se esistano grafi di Moore di valenza $d = 57$ e diametro 2 (e 3250 vertici). Per quanto riguarda diametri maggiori, Damerell, Bannai e Ito hanno provato che, per $q \geq 3$, il solo grafo di Moore di diametro q è il ciclo C_{2q+1} .

Sia Γ un grafo; chiamiamo **calibro** di Γ la lunghezza minima di un ciclo contenuto in Γ (il termine generalmente usato è quello inglese di **girth**); esso è di solito denotato con $g = g(\Gamma)$. Ad esempio, un grafo completo con almeno 3 vertici (o comunque un grafo che contenga un triangolo) ha calibre 3, mentre il grafo del cubo ha calibre 4; il grafo di Petersen ha calibre 5 (lo si verifichi). Per quanto riguarda gli alberi (che non hanno alcun ciclo), si conviene di dire che non hanno calibre, oppure che hanno calibre infinito. Il concetto opposto è quello di *circonferenza* di un grafo Γ , che indica la lunghezza massima di un ciclo di Γ .

Analogamente a quanto provato per il diametro nel Corollario 2.12, anche il valore del calibre di un grafo implica un limite al numero dei vertici (ma in questo caso la limitazione che si ottiene è inferiore).

Proposizione 2.14. Sia $\Gamma = (V, E)$ un grafo regolare d -valente con calibro $g \geq 3$, e poniamo $e = \lfloor (g-1)/2 \rfloor$ (la parte intera). Allora

$$|V| \geq 1 + d \cdot \frac{(d-1)^e - 1}{d-2}.$$

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione sfrutta idee analoghe a quelle utilizzate per quella del Lemma 2.11, e si invita il lettore a cercarle e svilupparle rigorosamente. Fissato un vertice v di Γ , si tratta di provare che due vertici $u_1 \neq u_2$ tali che le loro distanze da v non superano il valore $e-1$ (dove e è quello nell'enunciato) non possono essere adiacenti ad uno stesso vertice (che non sia eventualmente v), perché in tal caso si troverebbe un ciclo la cui lunghezza viola il limite inferiore imposto dal calibro g . Tenendo conto della regolarità di Γ , con un semplice passo induttivo si prova quindi che, per $1 \leq k \leq e$, il numero di vertici di Γ la cui distanza da v è k è $d(d-1)^{k-1}$. Procedendo poi come nella dimostrazione del Lemma 2.11 si trova che $|B_\Gamma(v, e)| = 1 + d \cdot \frac{(d-1)^e - 1}{d-2}$, valore che ovviamente limita inferiormente il numero di vertici di Γ . ■

Gabbie. Una classe di grafi cubici che riveste un certo interesse, è quella delle cosiddette gabbie. Un grafo cubico con calibro g è detto una *gabbia cubica* se ha il minimo numero possibile di vertici tra tutti i grafi cubici di calibro g . Si dimostra facilmente che il grafo completo K_4 è la sola gabbia cubica di calibro 3, e non è difficile, ma richiede un po' più di lavoro, provare che il grafo di Petersen è l'unica gabbia cubica di calibro 5. L'unica gabbia cubica di calibro 6 è il grafo di Heawood (1890):

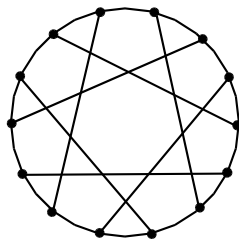


Figura 2.11: il grafo di Heawood.

La Proposizione 2.14 fornisce un limite inferiore al numero di vertici di una gabbia cubica, che con qualche considerazione aggiuntiva può essere leggermente migliorato, ottenendo:

Il numero di vertici di un grafo cubico di calibro g è almeno

$$n(3, g) = \begin{cases} 1 + 3(2^{(g-1)/2} - 1) & g \text{ dispari} \\ 2(2^{g/2} - 1) & g \text{ pari} \end{cases}$$

Tuttavia, tranne per i casi in cui g è piccola, questa stima inferiore non coincide con il valore minimo esatto del numero di vertici (cioè quello delle corrispondenti gabbie cubiche), che in genere è più grande. La tabella seguente riassume quanto sino ad oggi noto intorno alle gabbie cubiche. La prima colonna g è il valore del calibro, la colonna $|V|$ il numero di vertici della gabbia (che il lettore può confrontare con il limite inferiore $n(3, g)$), la colonna $\#$ indica il numero di gabbie distinte per un certo calibro, e l'ultima colonna fornisce l'indicazione del grafo oppure dei nomi degli scopritori (quando vi siano due date, la prima si riferisce alla costruzione della gabbia, la seconda alla dimostrazione della sua unicità, o alla determinazione del numero esatto di gabbie). Per valori di g maggiori di 12 non si conosce alcuna gabbia, anche se vi sono diverse costruzioni di grafi che forniscono un limite superiore per il numero di vertici di una gabbia.

g	$ V $	#	grafo
3	4	1	K_4
4	6	1	$K_{3,3}$
5	10	1	Petersen
6	14	1	Heawood
7	24	1	McGee
8	30	1	Tutte, Levi
9	58	18	Biggs/Hoare (1980), Brinkmann, McKay, Saager (1995)
10	70	3	O'Keefe, Wong (1980)
11	112	1	Balaban (1973), McKay, Myrvold (2003)
12	126	1	esagono generalizzato

Esercizio 2.16. È vero che i grafi di Kneser (vedi esercizio 1.28) sono regolari? Dati $2 \leq k$ e $n \geq 3k + 1$, si determini il calibro del grafo di Kneser $K(n, k)$. [Si distinguano i tre casi: $n = 2k + 1$, $2k + 1 < n < 3k$, $n \geq 3k$]

Esercizio 2.17. Avvalendosi di una opportuna variante del Lemma 2.11, si provi che il Corollario 2.12 sussiste sostituendo l'ipotesi che Γ sia regolare con quella che d sia il massimo fra i gradi dei vertici di Γ . Si osservi poi che l'eguaglianza nell'enunciato si può verificare solo nel caso di grafi regolari.

Esercizio 2.18. Sia Γ un grafo connesso di diametro q e calibro g . Si provi che $g \leq 2q + 1$.

Esercizio 2.19. Si provi che $K_{3,3}$ è l'unica gabbia cubica di calibro 4. Si provi che il grafo di Petersen è l'unica gabbia cubica di calibro 5.

Esercizio 2.20. Una classe molto importante di grafi è quella dei grafi $\Gamma = (V, E)$ tali che per ogni coppia di vertici distinti $v, w \in V$ esiste un automorfismo ϕ di Γ tale che $\phi(v) = w$; tali grafi sono chiamati *vertex-transitivi*. Chiaramente un grafo vertex-transitivo è regolare. Si provi che il grafo di Petersen è vertex-transitivo. Quindi si costruisca un grafo cubico che non sia vertex-transitivo, e si cerchi di farlo con il minor numero possibile di vertici.

ULTERIORI ESERCIZI

Esercizio 2.21. Sia K_6 il grafo completo su sei vertici, e siano i vertici numerati da 1 a 6; si assegni poi ad ogni vertice $e = \{n, m\}$ ($n \neq m$) il peso $c(e) = \min\{n, m\}$. Si dica (provando l'affermazione senza fare tutti i tentativi) qual è il peso totale minimo di un cammino hamiltoniano in tale grafo.

Esercizio 2.22. Siano n, m interi maggiori o uguali ad 1. Il grafo *completo bipartito* $K_{n,m} = (V, E)$ è definito nel modo seguente: l'insieme dei vertici $V = V_1 \cup V_2$ è unione disgiunta di due sottoinsiemi (da cui l'aggettivo "bipartito") di ordine rispettivamente n ed m , e i lati in E sono tutti e soli quelli che congiungono vertici di V_1 con vertici in V_2 ; ovvero $E = \{\{u, v\} \mid u \in V_1, v \in V_2\}$. Quanti lati ha $K_{n,m}$? Si discuta, al variare di n ed m l'esistenza di un cammino o di un circuito euleriano in $K_{n,m}$.

Esercizio 2.23. Sia Γ un grafo e v un suo vertice. Si provi che Γ è casualmente euleriano per v se e solo se Γ è euleriano e ogni ciclo di Γ contiene v .

Esercizio 2.24. Sia Γ_0 una foresta. Si costruisca un grafo Γ aggiungendo un nuovo vertice v a Γ_0 , e congiungendo v con tutti e soli i vertici di grado dispari di Γ_0 . Si provi che Γ è un grafo casualmente euleriano per v .

Esercizio 2.25. Dato un grafo Γ , sia $L(\Gamma)$ il grafo descritto nell'esercizio 1.35. Si provi che se Γ è euleriano, allora $L(\Gamma)$ è euleriano.

Esercizio 2.26. Si provi che $K_{n,m}$ è hamiltoniano se e soltanto se $n = m$. Si provi che se $|n - m| = 1$ allora $K_{n,m}$ ha un cammino (ma non un circuito) hamiltoniano.

Esercizio 2.27. Si formuli in termini di esistenza di cammini hamiltoniani in un opportuno grafo il famoso *problema del cavallo*: è possibile, partendo da una opportuna casella, e procedendo mediante successive mosse del cavallo, toccare una ed una sola volta tutte le caselle di una scacchiera? Dire se, nel caso di scacchiere di ordine 3×4 e 4×4 , il problema ha soluzione affermativa.

Esercizio 2.28. Sia \mathcal{C}_n il grafo che rappresenta il problema del cavallo (vedi esercizio precedente) su una scacchiera quadrata di n caselle per lato. Al variare di $n \geq 4$ si dica se \mathcal{C}_n ha un circuito o un cammino euleriano. La cosa cambia se la scacchiera, invece che su un piano, viene disegnata su un nastro (cioè se si identificano due lati opposti)?

Esercizio 2.29. Costruire un grafo connesso regolare 4-valente con 11 vertici e privo di circuiti hamiltoniani.

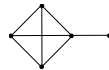
Esercizio 2.30. Si costruisca un grafo Γ , connesso e con 7 vertici, tale che $d_\Gamma(v) + d_\Gamma(w) \geq 6$ per ogni coppia di vertici v e w , ma che non ha sottografi isomorfi a cicli di lunghezza maggiore o uguale a 5.

Esercizio 2.31. Sia Γ un grafo connesso con n vertici, e sia $3 \leq k \leq n$. Assumendo che per ogni coppia di vertici v, w non adiacenti di Γ sia $d_\Gamma(v) + d_\Gamma(w) \geq k$, provare che Γ ha un ciclo di lunghezza almeno $\frac{k+2}{2}$.

Esercizio 2.32. Per $1 \leq n \in \mathbb{N}$, sia

$$h(n) = \frac{n(n-1)}{2} - (n-3) = \frac{n^2 - 3n + 6}{2}.$$

Sia $\Gamma = (V, E)$ un grafo con n vertici; si provi che se $|E| \geq h(n)$ allora Γ è hamiltoniano. Per ogni $n \geq 3$ si descriva un grafo con n vertici e $h(n) - 1$ lati che non è hamiltoniano. Si utilizzi il Teorema di Ore e, per la seconda parte, ci si ispiri al seguente esempio, dove $n = 5$:



Esercizio 2.33. Sia Γ un grafo connesso e tale che data una qualsiasi terna di vertici di Γ esiste almeno un lato che congiunge due vertici della terna. Si dica se è vero che Γ è hamiltoniano.

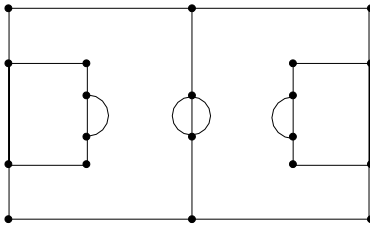
Esercizio 2.34. Il grafo Q_n (detto n -cubo) è il grafo i cui vertici sono le n -uple a coefficienti in $\{0, 1\}$, ed i cui lati sono tutte e sole le coppie di tali n -uple che differiscono esattamente per una componente (il grafo al punto 1 dell'esercizio 1.1 è Q_3). Si provi che, per ogni $n \geq 2$, Q_n è hamiltoniano.

Esercizio 2.35. Provare che il grafo completo K_7 può essere decomposto in tre cicli hamiltoniani disgiunti (ovvero tali che a due a due non hanno alcun lato in comune, e che utilizzano globalmente tutti i lati di K_7). Provare che invece K_6 non può essere decomposto in cicli hamiltoniani disgiunti. Cosa si può dire in generale per K_n ?

Esercizio 2.36. Provare che in un grafo planare con più di 3 vertici ci sono almeno 3 vertici di grado al più 5 (sugg.: si può supporre in partenza che non ci siano vertici di grado 1).

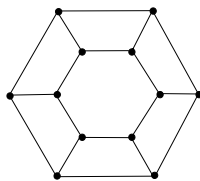
Esercizio 2.37. Provare che in un grafo planare con più di 3 vertici ci sono almeno 3 vertici di grado al più 5 (sugg.: si può supporre in partenza che non ci siano vertici di grado 1).

Esercizio 2.38. L'addetto alla manutenzione di un campo di calcio deve ripassare con l'apposita macchina la vernice bianca sulle linee del campo:



Si dica qual è il minimo numero di volte che egli deve interrompere l'erogazione della vernice (ed eventualmente spostarsi in un altro punto del campo).

Esercizio 2.39. Provare che il seguente grafo può essere esteso (aggiungendovi degli opportuni vertici) ad un grafo piano massimale regolare 5-valente.



Dire quindi se è vero che ogni grafo piano massimale regolare di grado 5 è isomorfo al grafo dell'icosaedro.

Esercizio 2.40. Costruire un grafo con sette vertici e diametro quattro con il massimo numero di lati.

Esercizio 2.41. Costruire un grafo con sette vertici e calibro tre con il massimo numero di lati. Stesso problema per un grafo con sette vertici e calibro quattro.

Esercizio 2.42. Costruire un grafo con 8 lati, calibro 4, ed il minimo numero possibile di vertici (ci sono due grafi possibili).

Esercizio 2.43. Si provi che il grafo di Heawood è l'unica gabbia cubica di calibro 6.

3 Grafi bipartiti

Dodici nobili cavalieri vengono incaricati da Re Artù di mettersi al servizio di altrettante indifese (ma fortunate?) donzelle. Durante un'animata seduta della Tavola Rotonda, ogni cavaliere esprime la propria preferenza per quattro delle dame. Ne nasce un pandemonio, e alla fine Artù assegna al Mago Merlino il compito di associare ad ogni cavaliere una damigella in modo che ad ognuno vada una delle sue predilette. È possibile fare ciò?

È chiaro che non sempre questo è possibile. Ad esempio, ovviamente non lo è se una delle dame non è nella rosa di favorite di alcun cavaliere (per quale motivo sentiamo che nella vita reale sarà proprio una circostanza del genere a verificarsi³, è un caso particolare di uno dei problemi fondamentali delle società umane, e non ci aspettiamo che sia la matematica a risolverlo. Un'altra questione è perché non vengano prese in considerazione anche le eventuali preferenze delle dodici fanciulle, ma, come da verbale risulta che ebbe a dichiarare Lancillotto, "Se dobbiamo tener conto anche dei desideri delle donne, dove mai andremo a finire?").

Comunque sia, i dati del problema possono essere convenientemente codificati mediante un grafo, nel quale l'insieme dei vertici si ripartisce in due sottoinsiemi, quello C dei cavalieri e quello D delle dame, e i lati indicano le preferenze di ciascun cavaliere; quindi ogni lato congiunge un vertice di C con un vertice di D (nel nostro esempio specifico, ogni vertice di C è adiacente a quattro vertici di D) e non esistono lati tra vertici appartenenti allo stesso insieme C o D . Grafi di questo tipo si chiamano *grafi bipartiti* e, chiaramente, al di là della leggenda, sono adatti a descrivere svariati problemi di assegnazione. Il problema del Mago Merlino, una volta disegnato il grafo, è quello di trovare dodici lati che accoppiano tutti e ventiquattro i vertici del grafo.

In questo capitolo ci occuperemo di grafi e problemi di questo tipo o simili, cominciando col discutere in generale la questione degli accoppiamenti.

3.1 Bipartizioni.

Un grafo si dice **bipartito** se esiste una partizione $V = A \cup B$, dell'insieme V dei vertici, in due sottoinsiemi non vuoti (e disgiunti) tale che gli estremi di nessun lato giacciono in uno stesso insieme della partizione (quindi ogni lato congiunge un vertice in A con un vertice in B).

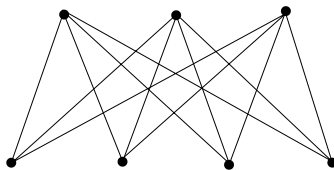


Figura 3.1: $K_{4,3}$.

Abbiamo già incontrato grafi bipartiti in alcune occasioni; ad esempio il grafo dei villaggi e dei pozzi è bipartito, così come in maniera naturale sono bipartiti i grafi dell'esercizio 1.13. In particolare poi, nell'esercizio 2.22 abbiamo definito i grafi bipartiti completi. Per comodità, ricordiamo la definizione:

Siano m, n interi positivi non nulli, e siano, rispettivamente, V_1 e V_2 due insiemi disgiunti di vertici. Il *grafo completo bipartito* è il grafo $K_{n,m} = (V, E)$ dove $V = V_1 \cup V_2$, e i lati

³in ogni caso con una frequenza superiore alla sua probabilità matematica, che è circa $1/11$.

sono tutti e soli quelli del tipo $\{a, b\}$ con $a \in V_1$ e $b \in V_2$. La Figura 3.1 è appunto un esempio di grafo bipartito completo.

Di fatto, i grafi bipartiti sono più di quelli che a prima vista si direbbe guardando qualche diagramma. Ad esempio il grafo del cubo è bipartito: la figura 3.2 mostra una possibile partizione dei vertici.

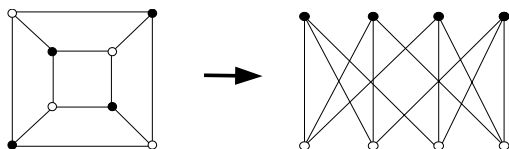


Figura 3.2: bipartizione del cubo.

Mentre è chiaro che un grafo che contiene un triangolo o un pentagono (cioè un 5-ciclo) non è bipartito, e dunque gli altri grafi dei solidi platonici non sono bipartiti. Ogni albero è bipartito; questa affermazione è una conseguenza del prossimo Teorema, si cerchi tuttavia di provarla per esercizio facendo induzione sul numero di vertici.

Teorema 3.1. *Un grafo con almeno due vertici è bipartito se e solo se non contiene cicli di lunghezza dispari.*

Alla dimostrazione premettiamo la seguente osservazione (ricordando che una *passeggiata* di lunghezza n in un grafo è una sequenza $v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \dots v_{n-1} e_n v_n$, di vertici e lati, sottoposta alla sola condizione che ogni lato e_i congiunge i vertici v_{i-1} e v_i).

Lemma 3.2. *Un grafo in cui è possibile trovare una passeggiata chiusa di lunghezza dispari ha un ciclo di lunghezza dispari.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\mathcal{P} : u = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \dots v_{n-1} e_n v_n = u$ una passeggiata chiusa di lunghezza dispari n in Γ , e procediamo per induzione su n (chiaramente $n \geq 3$). Se \mathcal{P} è un ciclo (cosa che, in particolare, avviene se $n = 3$) non c'è nulla da provare. Supponiamo quindi che $n \geq 5$ e che \mathcal{P} non sia un ciclo. Allora vi sono in essa almeno due vertici ripetuti (di cui almeno uno non agli estremi), diciamo $v_i = v_j$, con $0 \leq i < j \leq n$ (e $(i, j) \neq (0, n)$). Se $j - i$ è pari, allora la passeggiata chiusa

$$u = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \dots v_i e_{j+1} v_{j+1} \dots v_{n-1} e_n v_n = u$$

ha una lunghezza dispari strettamente minore di quella di \mathcal{P} , e dunque concludiamo per ipotesi induttiva che esiste un ciclo di lunghezza dispari in Γ . Se invece $j - i$ è dispari, allora è

$$v_i e_{i+1} v_{i+1} \dots v_{j-1} e_j v_j = v_i$$

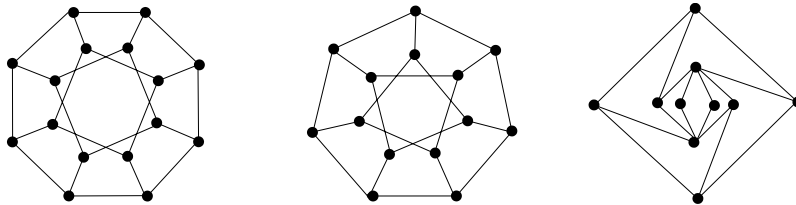
ad essere una passeggiata chiusa di lunghezza dispari strettamente inferiore ad n , e di nuovo si conclude applicando l'ipotesi induttiva. ■

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 3.1 Possiamo chiaramente assumere che Γ sia connesso. Se Γ è bipartito sull'insieme $V = A \cup B$ di vertici, allora i vertici di ogni ciclo di Γ , nell'ordine in cui compaiono nel ciclo, appartengono alternativamente ai due insiemi disgiunti A e B . Poiché il ciclo si deve chiudere allo stesso vertice da cui inizia, si conclude che il numero dei suoi lati (cioè di 'salti' tra A e B) deve essere pari.

Viceversa, supponiamo che Γ non contenga cicli di lunghezza dispari. Poiché Γ è connesso, per ogni coppia a e b di vertici è definita la distanza $d_\Gamma(a, b)$. Sull'insieme V dei vertici di Γ definiamo una relazione \sim ponendo $a \sim b$ se $d_\Gamma(a, b)$ è pari. Chiaramente, la relazione \sim è riflessiva e simmetrica. Supponiamo che per $a, b, c \in V$ sia $a \sim b$ e $b \sim c$. Allora esistono due cammini semplici di lunghezza pari, \mathcal{C}_2 e \mathcal{C}_1 , rispettivamente tra a e b , e tra b e c . Supponiamo, per assurdo, che la distanza tra a e c sia dispari; allora esiste un cammino semplice \mathcal{C}_3 tra c e a di lunghezza dispari. Percorrendo di seguito i cammini $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ e \mathcal{C}_3 si ottiene una passeggiata chiusa di lunghezza dispari. Per il Lemma 3.2 esiste allora un ciclo di lunghezza dispari in Γ , e questo contraddice l'ipotesi su Γ . Dunque \sim è una relazione d'equivalenza su V .

Sia ora $e = \{a, b\}$ un lato di Γ (esiste perché Γ ha almeno due vertici ed è connesso), e siano, rispettivamente A e B le classi di equivalenza di a e di b . Poiché $a \not\sim b$, $A \cap B = \emptyset$. Sia $u \in V$, e supponiamo, per assurdo, che u abbia distanza dispari sia da a che da b . Siano \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 cammini di lunghezza minima, rispettivamente tra a e u , e tra u e b . Percorrendo di seguito $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ ed il lato e , si ottiene allora una passeggiata chiusa di lunghezza dispari che inizia e termina in a , il che per l'ipotesi su Γ ed il Lemma 3.2, è una contraddizione. Dunque u ha distanza pari o da a o da b , e dunque $u \in A \cup B$. Pertanto $V = A \cup B$. Chiaramente, infine, nessun lato di Γ congiunge vertici che stanno entrambi in A o in B (perché in tal caso questi avrebbero distanza 1 e non sarebbero quindi in relazione). In conclusione, Γ è bipartito negli insiemi di vertici A e B . ■

Esercizio 3.1. Si dica quali tra i seguenti grafi sono bipartiti:



Esercizio 3.2. Sia Γ un grafo connesso e bipartito. Si provi che esiste una sola partizione dell'insieme V dei vertici rispetto alla quale Γ è bipartito.

Esercizio 3.3. Si dia un esempio di un grafo in cui esistono cammini chiusi non banali (cioè che non consistono di un solo vertice) di lunghezza pari, ma in cui i soli cicli di lunghezza pari sono quelli banali.

Esercizio 3.4. Sia $\Gamma = (V_1 \cup V_2, E)$ un grafo bipartito regolare k -valente con almeno 3 vertici. Si provino le seguenti affermazioni:

- 1) $|V_1| = |V_2|$;
- 2) Se $k = 2$, allora ogni componente connessa di Γ è un ciclo di lunghezza pari;
- 3) Se Γ è connesso, allora $\Gamma - e$ è connesso per ogni lato $e \in E$.
- 4) Se Γ è planare, allora $k \leq 3$.

Esercizio 3.5. Si provi che, per ogni $n \geq 2$, il n -cubo Q_n definito nell'esercizio 2.34 è un grafo bipartito.

3.2 Accoppiamenti: Teoremi di König e di Hall.

Torniamo al problema dei cavalieri di Re Artù e delle dame. Abbiamo osservato che un'ovvia condizione necessaria a che ad ogni dama sia assegnato un diverso cavaliere è che ognuna sia tra le favorite di almeno uno dei cavalieri. Estendendo in modo altrettanto ovvio questa osservazione, si comprende che una condizione necessaria affinché possa essere fatta una assegnazione completa è che per ogni sottoinsieme S di dame un numero almeno uguale di cavalieri indichi una dama di S tra le proprie favorite.

Come non sempre accade in matematica, questa ovvia condizione necessaria risulta anche sufficiente a che si possa stabilire una assegnazione ("accoppiamento") completo. Questo è il contenuto del famoso *Teorema dei matrimoni* di P.Hall (1936), che proveremo in questa sezione. Si chiama così, perché in genere viene introdotto evocando un'idilliaca riunione di un certo numero di ragazzi e ragazze, ove ciascuna ragazza prova sentimenti di ammirazione, inclinazione o, almeno, di simpatia, verso alcuni dei ragazzi, e viceversa; e la questione è quale sia il massimo numero di matrimoni (etero) che è possibile combinare rispettando le reciproche simpatie⁴.

Cominciamo dunque con il formalizzare il problema. Un **accoppiamento** in un grafo bipartito Γ è un insieme di lati di Γ che a due a due non hanno estremi in comune. Un accoppiamento A di Γ si dice *massimo* se non esistono accoppiamenti di Γ con un numero maggiore di lati.

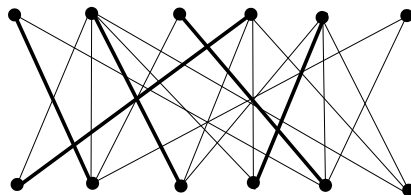


Figura 3.3: un accoppiamento massimo in un grafo bipartito.

Sia $V_1 \cup V_2$ la partizione dell'insieme dei vertici di un grafo bipartito Γ con $|V_1| \leq |V_2|$. Un accoppiamento A di Γ si dice *completo* se $|A| = |V_1|$. Poiché Γ è bipartito, questo significa che ogni vertice di V_1 appartiene ad uno (ed un solo) lato dell'accoppiamento. Quindi, i lati di un accoppiamento completo fanno corrispondere ad ogni vertice di V_1 un vertice distinto di V_2 .

Dedurremo il Teorema di Hall da un teorema di König del 1916 (e che oggi è più noto di quanto fosse ai tempi del lavoro di Hall, il quale produsse una propria e complicata dimostrazione), per enunciare il quale abbiamo bisogno di introdurre una nuova definizione.

Una **copertura** di un grafo (non necessariamente bipartito) Γ è un sottoinsieme U di vertici tale che ogni lato di Γ è incidente ad almeno un vertice appartenente ad U . Si denota con $\tau(\Gamma)$ il minimo numero di vertici che è necessario impiegare per avere una copertura di Γ .

⁴abbiamo scelto un esempio diverso perché ci preme che queste note siano accessibili anche ad un visitatore proveniente da un altro pianeta, dove i sessi siano 3 o più, e che ci vogliano tutti per metter su famiglia.

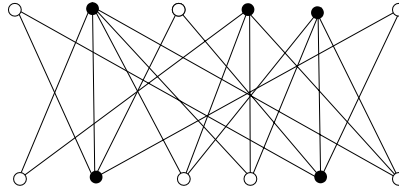


Figura 3.4: una copertura minima in un grafo bipartito.

Teorema 3.3. (König) *Sia Γ un grafo bipartito con almeno due vertici. Il massimo numero di lati di un accoppiamento di Γ coincide con $\tau(\Gamma)$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\Gamma = (V, E)$ un grafo bipartito; e siano $A \subseteq E$ un accoppiamento di Γ , e $U \subset V$ una copertura di Γ . Allora, per definizione di copertura, ogni lato $e \in A$ ha almeno un estremo in U ; possiamo quindi associare ad ogni elemento e di A un vertice $v(e) \in U$, tale che $v(e)$ è un estremo di e . Poiché i lati di A a due a due non hanno estremi in comune, ciò definisce una iniezione da A in U , e dunque prova che $|A| \leq |U|$. In particolare, se A è un accoppiamento massimo e U una copertura minima si ha $|A| \leq |U| = \tau(\Gamma)$.

Proviamo ora che se A è un accoppiamento massimo di Γ , allora è possibile scegliere un vertice di ciascun lato di A in modo da ottenere una copertura, che ha quindi lo stesso numero di elementi di A . Quindi $\tau(\Gamma) \leq |A|$, che insieme con la disuguaglianza provata prima fornisce la validità dell'enunciato.

Sia dunque A un accoppiamento massimo di $\Gamma = (V_1 \cup V_2, E)$. Diciamo che un vertice è saturato (da A) se appartiene a qualche (e quindi ad uno solo) lato in A , e diciamo che un cammino semplice, con almeno un lato, di Γ ,

$$v_0 e_1 v_1 e_2 \dots v_{k-1} e_k v_k$$

è alterno, se il primo lato e_1 non appartiene ad A , e i lati successivi appartengono alternativamente ad A e ad $E \setminus A$. Supponiamo che \mathcal{C} sia un cammino alterno che inizia e termina con vertici v_0 e v_k non saturati da A . Allora anche l'ultimo lato di \mathcal{C} non appartiene ad A , e \mathcal{C} non è un ciclo (dato che ha un numero dispari di lati); si vede quindi che togliendo da A i lati che compaiono in \mathcal{C} , e rimpiazzandoli con i restanti lati di \mathcal{C} (che non appartengono ad A), si ottiene un accoppiamento A' che ha un numero di lati, contro la nostra assunzione sulla massimalità dell'ordine di A . Possiamo quindi concludere che: *non esistono cammini alterni che iniziano e terminano in vertici entrambi non saturati*. Da ciò segue che se $e \in A$, allora non è possibile che da entrambi gli estremi di e partano cammini alterni che terminano in vertici non saturati (perché in tal caso, congiungendo i due cammini si troverebbe da qualche parte nel cammino ottenuto un cammino alterno che viola la condizione di sopra). Associamo ora ad ogni $e \in A$ un estremo $u(e)$ nella maniera seguente: $u(e)$ è il solo estremo di e dal quale parte un cammino alterno che termina in un vertice non saturato, se questo esiste, altrimenti si pone $u(e)$ il vertice di e che appartiene a V_1 . Proviamo che l'insieme di vertici $C = \{u(e) \mid e \in A\}$ così ottenuto è una copertura di Γ . Sia $f = \{u, w\}$ un lato di Γ . Se $f \in A$, f è incidente a $u(f) \in C$. Supponiamo quindi che $f \notin A$. Se uno dei due estremi (diciamo u) di f non è saturato, allora w deve esserlo (altrimenti potremmo aggiungere il lato f all'accoppiamento A), quindi w è estremo di un lato $e' \in A$; ma allora (poiché $w e' u$ è un cammino alterno

che termina in un vertice non saturato) $w = u(e')$. Supponiamo infine che u e w siano entrambi saturati; uno dei due appartiene a V_1 ; sia $u \in V_1$ e sia $e_1 = \{u, u'\} \in A$. Se $u = u(e')$, siamo a posto; altrimenti $u(e') = u'$, e quindi, per la definizione di $u(e')$, si ha che da u' parte un cammino alterno $u'e_1v_1e_2 \dots v_{k-1}e_kv_k$ che termina in un vertice non saturato v_k . Ma allora anche $wfu'e_1v_1e_2 \dots v_{k-1}e_kv_k$ è un cammino alterno che termina in un vertice non saturato e quindi, se e_2 è il lato di A che contiene w , è per definizione, $w = u(e_2)$. Questo mostra che C è una copertura di Γ , e completa la dimostrazione del Teorema. ■

Come promesso, dal Teorema di König possiamo ora dedurre abbastanza facilmente quello di Hall. Prima, dobbiamo introdurre ancora nuove notazioni.

Sia v un vertice del grafo $\Gamma = (V, E)$; denotiamo con $N_\Gamma(v)$ l'insieme dei vertici di Γ adiacenti a v , cioè l'insieme dei $w \in V$ tali che $\{v, w\} \in E$. Se S è un sottoinsieme dell'insieme V dei vertici di Γ , denotiamo con $N_\Gamma(S)$ l'insieme dei vertici di Γ che sono adiacenti ad almeno un elemento di S , ovvero $N_\Gamma(S) = \bigcup_{v \in S} N_\Gamma(v)$.

Teorema 3.4. *Sia $\Gamma = (V_1 \cup V_2, E)$ un grafo bipartito, con $|V_1| \leq |V_2|$. Allora Γ ha un accoppiamento completo se e soltanto se $|N_\Gamma(S)| \geq |S|$ per ogni sottoinsieme S di V_1 .*

DIMOSTRAZIONE. Se Γ ha un accoppiamento completo, è chiaro che la condizione dell'enunciato è soddisfatta.

Viceversa, supponiamo che $|N_\Gamma(S)| \geq |S|$ per ogni sottoinsieme S di V_1 , e sia U una copertura di Γ . Sia $S = V_1 \setminus U$; allora, poiché ogni lato di Γ ha almeno un estremo in U , $N_\Gamma(S) \subseteq U \cap V_2$. Dunque $|U \cap V_2| \geq |N_\Gamma(S)| \geq |S| = |V_1| - |U \cap V_1|$, e quindi

$$|U| = |U \cap V_1| + |U \cap V_2| \geq |U \cap V_1| + (|V_1| - |U \cap V_1|) = |V_1|.$$

Pertanto $\tau(\Gamma) = |V_1|$, e per il Teorema di König si conclude che Γ ha un accoppiamento completo. ■

Di solito, si parla dei teoremi di König e di Hall come di teoremi "equivalenti"; intendendo con ciò che ciascuno si può dedurre in modo abbastanza agevole dall'altro (esercizio 3.10 – mentre nell'esercizio 3.26 si tratteggia una dimostrazione diretta del teorema di Hall). Entrambi poi discendono piuttosto facilmente dal Teorema di Menger, che vedremo più avanti.

Il teorema di Hall ha applicazioni in varie parti della matematica e, a seconda del contesto, può assumere diverse formulazioni, a volte apparentemente lontane dalla teoria dei grafi. Vediamone una delle più comuni. Sia $\mathcal{F} = A_1, A_2, \dots, A_n$ una famiglia di sottoinsiemi (non necessariamente distinti) di un insieme X ; un *sistema di rappresentanti distinti* (SDR) di \mathcal{F} è una n -upla (a_1, a_2, \dots, a_n) di elementi distinti di X tale che $a_i \in A_i$ per ogni $i = 1, \dots, n$.

Teorema 3.5. (P. Hall) *Una famiglia A_1, A_2, \dots, A_n di sottoinsiemi dell'insieme X ammette un sistema di rappresentanti distinti se e soltanto se*

$$\left| \bigcup_{i \in S} A_i \right| \geq |S| \quad \text{per ogni } \emptyset \neq S \subseteq \{1, 2, \dots, n\}.$$

DIMOSTRAZIONE. Se (a_1, a_2, \dots, a_n) è un sistema di rappresentanti distinti della famiglia di insiemi, allora per ogni $\emptyset \neq S \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ si ha $\bigcup_{i \in S} A_i \supseteq \{a_i \mid i \in S\}$, e poiché gli a_i sono a due a due distinti la condizione di Hall è soddisfatta. Per il viceversa, consideriamo il grafo bipartito Γ sui vertici $V_1 = X$ e $V_2 = \{1, 2, \dots, n\}$, dove due vertici $x \in X$ e $i \in \{1, \dots, n\}$ sono adiacenti se e solo se $x \in A_i$. Allora, per ogni $S \subseteq \{1, \dots, n\}$, $|\bigcup_{i \in S} A_i| = N_\Gamma(S)$, e la condizione di Hall implica, per il Teorema 3.4, che esiste un accoppiamento completo di Γ . I vertici in X dei lati che formano tale accoppiamento costituiscono un sistema di rappresentanti distinti per la famiglia A_1, \dots, A_n . ■

Alla teoria che abbiamo sviluppato (incluso l'algoritmo che vedremo nel prossimo paragrafo) sugli accoppiamenti nei grafi bipartiti, si possono ricondurre anche altri problemi di assegnazione, solo apparentemente più complessi. Come, ad esempio, quelli in cui sono ammesse assegnazioni multiple.

Un caso tipico è quello del giorno libero. All'inizio dell'anno scolastico il preside di una scuola predispone l'orario delle lezioni, assegnando ad ogni insegnante un giorno libero settimanale (scelto dal Lunedì al Sabato); preventivamente, egli chiede ad ogni insegnante di indicare una preferenza per due fra i sei giorni disponibili. Qual'è il massimo numero di docenti che il preside è in grado di soddisfare, tenendo conto che per ciascun giorno della settimana al più cinque insegnanti possono avere quello come giorno libero? Il preside può procedere in questo modo: disegna un grafo bipartito in cui da una parte mette i docenti della scuola, e dall'altra parte sistema *cinque diversi punti* per ciascun giorno della settimana, per un totale quindi di 30 vertici; quindi traccia i lati che rappresentano le preferenze degli insegnanti, avendo cura, se ad esempio l'insegnante x desidera il Martedì, di congiungere il vertice x con tutti e cinque i vertici del Martedì. In questa maniera egli riconduce il suo problema a quello di un grafo bipartito, e può usare la teoria di questo paragrafo (e l'algoritmo del prossimo).

Di fatto, sulla base di questa osservazione, il preside può anche disegnare solo un grafo con un solo vertice per ogni giorno della settimana, ed applicare la seguente proposizione, che non è difficile dedurre dal teorema di Hall.

Proposizione 3.6. *Sia Γ un grafo bipartito sull'insieme di vertici $V_1 \cup V_2$, allora condizione necessaria e sufficiente per poter associare ogni elemento di V_1 ad un vertice di V_2 in modo che ciascun elemento di V_2 risulti assegnato a non più di d elementi di V_1 , è che, per ogni sottoinsieme S di V_1 , si abbia:*

$$|N_\Gamma(S)| \geq \frac{1}{d}|S|.$$

DIMOSTRAZIONE. Esecizio. ■

Esercizio 3.6. Sia $\Gamma = (V_1 \cup V_2, E)$ un grafo bipartito, con $|V_1| = n$, e tale che per ogni $1 \leq k \leq n$ esiste un vertice $v_k \in V_2$ il cui grado è k . Si provi che Γ ammette un accoppiamento completo.

Esercizio 3.7. Sia A una matrice a coefficienti in $\{0, 1\}$. Si provi che il minimo numero di linee (righe o colonne) che contengono tutti gli 1 della matrice è uguale al massimo numero di 1 che compaiono a due a due in linee diverse (così a volte viene enunciato il Teorema di König).

Esercizio 3.8. Sia H un sottogruppo di indice finito n del gruppo G . Un insieme di n elementi $\mathcal{S} = \{g_1, \dots, g_n\}$ di G è detto un *sistema di rappresentanti* delle classi laterali destre modulo H , se $\{Hg_i \mid i = 1, \dots, n\}$ è l'insieme di tutte le classi laterali destre di G modulo H (ovvero, se G è l'unione disgiunta $G = Hg_1 \cup \dots \cup Hg_n$). Analogamente, \mathcal{S} si dirà un sistema di rappresentanti delle classi laterali sinistre modulo H , se $\{g_iH \mid i = 1, \dots, n\}$ è l'insieme di tutte le classi laterali sinistre di G modulo H . Si provi che, per ogni sottogruppo H di indice finito n in G , esiste un

insieme di n elementi di G che è contemporaneamente un sistema di rappresentanti delle classi laterali destre, ed un sistema di rappresentanti delle classi laterali sinistre modulo H .

Esercizio 3.9. Si provi che un grafo bipartito regolare ammette sempre un accoppiamento completo. Più in generale, sia $\Gamma = (V_1 \cup V_2, E)$ un grafo bipartito tale che tutti i vertici di V_1 hanno lo stesso grado, così come tutti quelli di V_2 (ma i due gradi possono essere diversi); si provi che Γ ammette un accoppiamento completo.

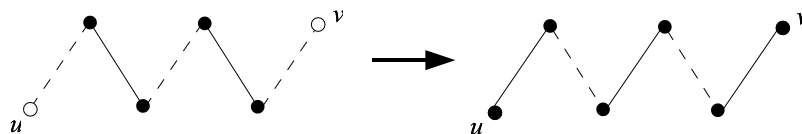
Esercizio 3.10. Assumendo il Teorema di Hall, si deduca la seguente forma semplificata del Teorema di König. Sia $\Gamma = (V_1 \cup V_2, E)$ un grafo bipartito, con $|V_1| \leq |V_2|$; allora Γ ha un accoppiamento completo se e soltanto se $\tau(\Gamma) = |V_1|$. Si cerchi quindi di provare la forma generale del Teorema di König.

3.3 L'algoritmo ungherese.

In questa sezione descriviamo un efficiente algoritmo (chiamato *algoritmo ungherese*, e sviluppato da Kuhn negli anni '50), per trovare un accoppiamento massimo in un grafo bipartito. L'idea essenziale (e che già compare nei lavori di König) è quella di utilizzare i cammini alterni, ai quali non a caso abbiamo già ricorso per la dimostrazione del teorema di König, come passo per produrre, a partire da un accoppiamento dato, un altro (se esiste) con un maggior numero di lati. Ricordiamo la definizione:

Sia A un insieme di lati del grafo $\Gamma(V, E)$. Un *A-cammino alterno* è un cammino semplice di Γ , con almeno un lato, ed i cui lati appartengono alternativamente a $E \setminus A$ e ad A , ed il primo lato appartiene a $E \setminus A$ (quest'ultima condizione in genere non viene richiesta, ma a noi è comoda, visto l'uso che intendiamo fare dei cammini alterni).

D'ora in avanti, assumeremo che Γ sia bipartito, e che A sia un suo accoppiamento (non necessariamente massimo). Indichiamo con $V(A)$ l'insieme dei vertici di Γ che sono estremi di qualche lato di A ; li chiameremo vertici *saturati* da A . L'osservazione fondamentale (che abbiamo già adoperato per dimostrare il teorema 3.3) è che se un *A-cammino* alterno di Γ inizia e termina con vertici v_0 e v_k non saturati da A , allora togliendo da A i lati che compaiono in \mathcal{C} , e rimpiazzandoli con i restanti lati di \mathcal{C} , si ottiene un accoppiamento A' che ha un numero di lati maggiore di quello di A .



In particolare quindi, se A è un accoppiamento massimo, allora non esistono *A-cammini* alterni i cui vertici estremi sono entrambi non saturati da A . L'algoritmo ungherese consiste in ripetute applicazioni di questa procedura. Prima di descriverlo formalmente, vediamo come funziona con un esempio.

Supponiamo di voler trovare un accoppiamento massimo del grafo bipartito della Figura 1. Il primo passo è quello di trovare un qualsiasi accoppiamento iniziale A_0 . Per fare questo si possono listare i vertici, separatamente per entrambi i due blocchi V_1 e V_2 di vertici della bipartizione, e quindi accoppiare il primo vertice di V_1 con il primo vertice di V_2 a cui esso è adiacente; poi

passare al secondo vertice di V_1 ed accoppiarlo al primo vertice ancora disponibile di V_2 e così via: in questo modo, nel nostro esempio, si trova l'accoppiamento di Figura 2. Se in questo modo tutti i vertici vengono saturati, allora l'accoppiamento A_0 è già completo e dunque massimo.

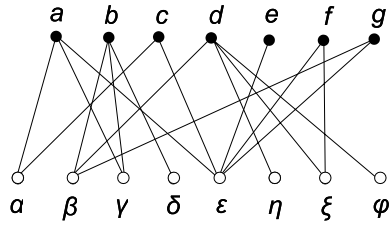


Figura 1

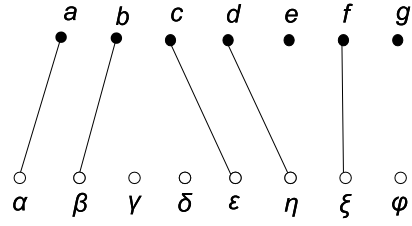


Figura 2

Altrimenti, si considera un vertice (il primo in una delle due liste) che non sia saturato dall'accoppiamento: ad esempio, il vertice γ . Si cerca quindi, a partire dal vertice γ , un A_0 -cammino alterno che termini in un altro vertice (nel nostro caso g) non saturato da A_0 (Figura 3). Si rimpiazza quindi A_0 , mediante la procedura descritta sopra, con un nuovo accoppiamento A_1 (Figura 4), che ha un lato in più.

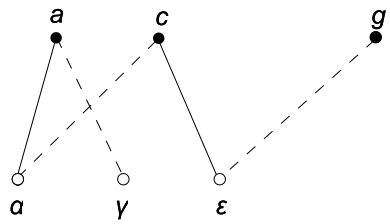


Figura 3

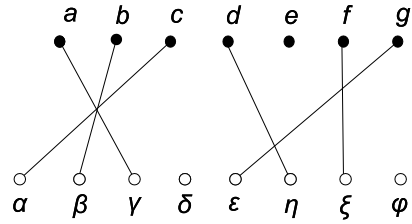


Figura 4

Se è ancora possibile (come nel nostro esempio), si ripete la procedura: troviamo che dal vertice ϵ , non saturato da A_1 , inizia un cammino A_1 -alterno che termina nel vertice non saturato δ .

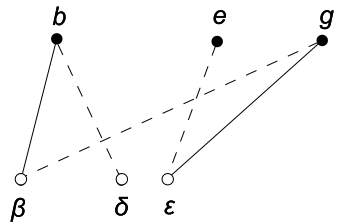


Figura 5

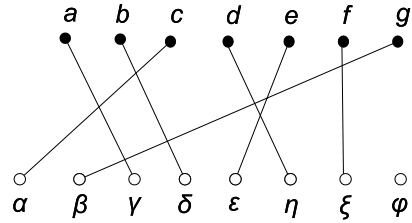


Figura 6

Si rimpiazzano i lati di tale cammino che appartengono ad A_1 con quelli che non vi appartengono, e si ottiene un nuovo e più grande accoppiamento, quello della figura 6. Tale accoppiamento è completo (dato che tutti i vertici di un blocco sono saturati) e quindi è massimo.

In questo esempio, il risultato finale è stato un accoppiamento completo. Non è sempre questo il caso, ma l'algoritmo ungherese fornisce comunque un accoppiamento massimo. Per convincercene, dobbiamo provare che quando esso si arresta, l'accoppiamento al quale è pervenuto è massimo. Ora, l'algoritmo si arresta quando da nessun vertice non saturato inizia un cammino alterno che termina in un altro vertice non saturato. Da questo, l'argomento utilizzato nella dimostrazione del Teorema di König mostra che l'accoppiamento è massimo.

Diamo ora una descrizione più formale dell'algoritmo. Sia $\Gamma = (V, E)$ un grafo bipartito con almeno un lato. Se A è un accoppiamento e v un vertice non saturato, chiamiamo albero A -alternò passante da v , un sottoalbero di Γ in cui tutti i cammini che partono da v sono A -alterni. Dato un vertice v di Γ è sempre possibile costruire un albero A -alternò passante da v e che sia massimale con queste proprietà (si può usare un algoritmo tipo spanning-tree).

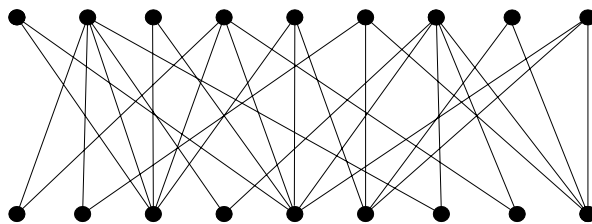
Algoritmo ungherese

-
- PASSO 1 Costruisci un qualsiasi accoppiamento A di Γ , e poni $S = V$.
- PASSO 2 Se ogni $v \in S$ è saturato da A , stop e dai A in output. Altrimenti vai al passo 3.
- PASSO 3 Dato $v \in S$ non saturato da A , costruisci un albero A -alternò massimale passante per v .
- Se l'albero contiene un A -cammino alternò in cui entrambi gli estremi non sono saturati, sostituisci in A i lati che appartengono al cammino con gli altri lati del cammino; poni $S = V$, quindi torna al passo 2.
 - Se l'albero non contiene A -cammini alterni, poni $S = S \setminus \{v\}$, e torna al passo 2.
-

In alcune applicazioni è possibile che ad ogni lato del grafo bipartito sia assegnato un "costo". In tal caso l'algoritmo ungherese può essere adattato ad un algoritmo che determina un accoppiamento massimale di costo minimo.

Esercizio 3.11. Tra ciascuno dei cavalieri Orlando, Rinaldo, Ruggiero, Brandimarte, Oliviero, Ferraù, e ciascuna delle ragazze Angelica, Bradamante, Fiordiligi, Doralice, Alcina e Morgana, corre un reciproco interesse sentimentale se (e solo se) nei loro nomi vi è una sequenza uguale di due lettere. Dire se è possibile combinare 6 fidanzamenti. Se Ferraù si fida con Doralice, con chi si deve fidanzare Orlando?

Esercizio 3.12. Utilizzando l'algoritmo ungherese trovare un accoppiamento massimo per il seguente grafo:



Esercizio 3.13. Si delinei un algoritmo che, a partire da una qualunque copertura di un grafo bipartito, trovi una copertura minima (senza ricorrere direttamente all'algoritmo ungherese).

Esercizio 3.14. Otto studenti intendono leggere almeno uno tra i libri $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$, dei quali la biblioteca possiede una copia ciascuno, secondo la seguente tabella di preferenze.

	Aldo	Bice	Ciro	Dina	Elsa	Febo	Gina	Hulk
libri	$\alpha \delta$	$\beta \epsilon$	$\gamma \delta$	$\alpha \epsilon$	$\beta \delta$	$\delta \epsilon$	$\alpha \beta$	$\gamma \epsilon$

Sapendo che il prezzo dei libri è di 10 Euro per α e β , 13 Euro per γ , 16 per δ , e 19 per ϵ , dire con quale minima spesa la biblioteca è in grado di assecondare tutti e otto gli studenti. Qual'è la spesa minima per poter soddisfare, in due turni di prestito, entrambe le scelte di ogni studente?

Esercizio 3.15. I circoli scacchistici \mathbb{A} e \mathbb{B} si affrontano in una sfida tra due squadre di sette giocatori ciascuna. I punteggi ELO dei componenti le due squadre sono i seguenti:

	a		1825		α		1918
	b		2040		β		2024
	c		1912		γ		1892
squadra \mathbb{A} :	d		1768	squadra \mathbb{B} :	δ		1844
	e		1884		ϵ		1758
	f		2012		ϕ		2030
	g		1944		χ		1919

Vengono giocati di seguito tre turni, ognuno dei quali comprende sette partite. Preparare la lista delle partite dei tre turni, tenendo conto che in ogni turno si devono giocare (tra quelle possibili: cioè tra avversari che non si sono ancora incontrati) le partite che minimizzano la media delle differenze dei punteggi ELO (in valore assoluto) sulle sette scacchiere.

Digressione: perché i sessi sono due. Supponiamo che gli abitanti di un diverso pianeta, che (per non sprecare fantasia) chiameremo Olosac, si suddividano in tre sessi, e che i rapporti sentimentali e le "storie" avvengano necessariamente per triadi, e non per coppie, di individui appartenenti ciascuno ad uno dei tre diversi sessi⁵. Il problema dei matrimoni su Olosac sarebbe quindi esposto nel modo seguente:

Sia G un grafo in cui l'insieme dei vertici è ripartito in tre sottoinsiemi A , B , e C (i tre sessi), ed i cui lati (le reciproche simpatie individuali tra vertici di sesso diverso) hanno gli estremi in due insiemi diversi della partizione (un grafo del genere si chiama grafo *tripartito* - vedi §3.4). Qual è il massimo numero di triangoli indipendenti (cioè, a due a due privi di vertici in comune) che è possibile trovare nel grafo? Supponendo - per semplicità - che ci sia lo stesso numero n di individui di ciascun sesso, esistono condizioni necessarie e sufficienti facilmente controllabili affinché si trovino n triangoli indipendenti (e che quindi ognuno si possa atternare secondo le proprie inclinazioni)?

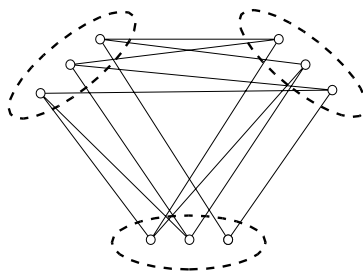


Figura 3.5: un caso di malasorte su Olosac.

Innanzitutto osserviamo che, su Olosac, combinare anche *un solo* matrimonio (a tre) può essere un problema persino per la matematica. Con due sessi, è sufficiente una reciproca simpatia tra due individui. Su Olosac le cose possono essere molto più infelici che da noi: la Figura 3.5 mostra un caso in cui tra 9 individui (3 per sesso) vi sono 13 simpatie tra coppie, ma nessun triangolo (con gli stessi vertici e la stessa tripartizione, è possibile anche trovare grafi con 18 lati e nessun

⁵in verità, anche su Olosac si formano triadi omo- o bi-sessuali: ma sempre a tre a tre ci si mette. Il due è aborrito dagli abitanti di quel lontano pianeta.

triangolo - se ne cerchi uno per esercizio - i quali però presentano dei comportamenti 'anomali', ad esempio che ogni vertice in A sia connesso soltanto a vertici di B o di C).

Detto questo, ci viene, però, il dubbio che forse la psicologia degli abitanti di Olosac sia strutturata in modo che le simpatie tra individui non derivino dalla sovrapposizione fortunata di preesistenti simpatie a coppie, ma nascano quasi naturalmente soltanto come simpatie tra terne, e che anzi le simpatie tra coppie di individui di diverso sesso siano viste come disdicevoli (per quanto in genere tollerate durante l'età adolescenziale). Possiamo, continuando di questo passo, immaginare allora che gli olosacchiani (sempre che ne rimanga loro il tempo) abbiano sviluppato una matematica meno 'binaria' della nostra; nella quale un triangolo sia una cosa del tutto naturale, almeno quanto, e forse anche più, che un segmento. Se così è, la 'nostra' definizione di grafo deve apparire bizzarra agli occhi degli olosacchiani, per i quali la definizione naturale potrebbe invece essere:

- un *olografo* $\Delta = (V, T)$, è un insieme di vertici V ed un insieme di terne $\{v_1, v_2, v_3\}$ di elementi distinti di V dette *triadi*, etc. etc.

Un olografo arriva dunque già provvisto di triangoli (o, per usare il termine olosacchiano, triadi), altrimenti è banale (dal nostro punto di vista, un olografo non ha lati che non siano nel bordo di un triangolo). In un testo di teoria degli olografi il primo teorema è:

Teorema. Per ogni vertice v di un olografo $\Delta = (V, T)$, sia $d_\Delta(v)$ il numero di triadi incidenti a v . Allora $\sum_{v \in V} d_\Delta(v) = 3|T|$.

A questo punto, un olografo Δ si dice tripartito se l'insieme dei suoi vertici è unione disgiunta di tre sottoinsiemi non vuoti $A \cup B \cup C$, ed ogni triade di Δ ha esattamente un vertice in ogni componente. Un *interzamento* di un olografo tripartito Δ è una famiglia di triadi di Δ che a due a due non hanno vertici in comune. È possibile trovare (come nel teorema di König) in altro modo quale sia il numero di triadi di un interzamento massimo in un olografo tripartito?

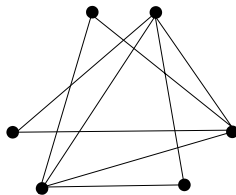


Figura 3.6: un olografo tripartito.

L'idea di copertura si può anche definire allo stesso modo: una *copertura* di un olografo è un insieme U di vertici tale che ogni triade dell'olografo è incidente ad almeno un vertice di U . Con questa definizione, l'analogo del teorema di König non funziona: la figura 3.6 mostra un olografo tripartito in cui gli interzamenti massimi sono costituiti da un'unica triade, ma in cui il minimo numero di vertici di una copertura è 2. Personalmente, non sono riuscito a trovare un possibile corrispondente del teorema di König per gli olografi. Per quanto riguarda il teorema di Hall, l'ovvia (per noi, non sappiamo quanto per un olosacchiano) condizione necessaria per l'esistenza di un interzamento completo, cioè che per ogni sottoinsieme di vertici (di ciascun sesso) esistano almeno un pari numero di triadi che sono incidenti a vertici di quell'insieme, non è sufficiente: l'esempio in figura 3.6 lo dimostra.

Ma il peggio deve ancora venire. Anche se noi non siamo in grado di trovare delle condizioni esprimibili in modo semplice che siano equivalenti all'esistenza di un interzamento completo, possiamo chiederci se esiste un algoritmo efficiente, del genere dell'algoritmo ungherese che, dato un olografo tripartito ne determina un interzamento massimo. È stato provato che questo problema è NP-completo; ovvero dello stesso tipo di complessità del problema del cammino hamiltoniano. Qualcosa di presumibilmente intrattabile dal punto di vista di un algoritmo ottimale, e comunque concettualmente assai diverso dal caso, tutto sommato semplice, degli accoppiamenti. Nel caso qualcuno avesse intenzione di lagnarsi di come vanno le cose sulla terra.

3.4 Teorema di Turán.

In questo paragrafo torniamo a considerazioni di carattere più astratto intorno ai grafi bipartiti, caratterizzandone alcuni come i grafi con il massimo numero di lati con la proprietà di essere privi di triangoli (ovviamente: fissato il numero dei vertici).

In effetti, ciò che proveremo è un caso particolare di un teorema più generale (dovuto a Turán, ed al quale accenneremo alla fine), ma ci serve come esempio di un tipo di problemi che costituiscono quella che viene chiamata *teoria estrema* dei grafi. Naturalmente, non vi è una definizione precisa di che cosa consista la teoria estrema; il tipico problema di cui si occupa è: fissata una certa proprietà \mathcal{P} , cosa si può dire dei grafi che hanno il massimo (o, a volte, minimo) numero di lati tra quelli che (con lo stesso numero di vertici) soddisfano la proprietà \mathcal{P} ? I grafi di questo tipo si chiamano *estremali* rispetto a \mathcal{P} ; è possibile determinarli completamente? È intuibile che molto spesso si tratta di problemi molto difficili. Altri esempi di problemi estremali sono la classificazione dei grafi di Moore, e quella delle cabbie cubiche, a cui abbiamo accennato nella sezione 2.4.

La proprietà che qui ci interessa è quella di non possedere sottografi isomorfi al triangolo K_3 (oppure, nella versione generale, sottografi isomorfi ad un grafo completo K_r). Chiaramente, ogni grafo bipartito soddisfa questa proprietà; quindi, come primo passo, cerchiamo, fissato il numero n di vertici, quali siano i grafi bipartiti su un n vertici che possiedono il massimo numero di lati. Ovviamente possiamo restringere la nostra ricerca ai grafi bipartiti completi K_{n_1, n_2} con $n = n_1 + n_2$.

Dato un numero reale x , denotiamo con $\lfloor x \rfloor$ il massimo numero intero m tale che $m \leq x$ ($\lfloor x \rfloor$ si chiama la *parte intera* di x). Notiamo quindi un semplice proprietà numerica.

Lemma 3.7. *Siano n_1, n_2 interi positivi e $n = n_1 + n_2$. Allora $n_1 n_2 \leq \lfloor n^2/4 \rfloor$.*

DIMOSTRAZIONE. Basta osservare che

$$n^2 \geq n^2 - (n_1 - n_2)^2 = (n_1 + n_2)^2 - (n_1 - n_2)^2 = 4n_1 n_2,$$

e quindi $n_1 n_2 \leq n^2/4$. Poiché $n_1 n_2$ è un intero si ha $n_1 n_2 \leq \lfloor n^2/4 \rfloor$. ■

Ora, usando ad esempio l'argomento di questa dimostrazione, si vede facilmente che se $n = 2m$ è pari, allora si ha l'uguaglianza $n_1 n_2 = \lfloor n^2/4 \rfloor$ se e soltanto se $n_1 = m = n_2$; mentre se $n = 2m + 1$ è dispari, allora l'uguaglianza si ottiene per $n_1 = m + 1$ e $n_2 = m$.

Se $\Gamma = K_{n_1, n_2}$ è il grafo bipartito completo con $n = n_1 + n_2$ vertici, allora il numero di lati di Γ è $n_1 n_2$. Definiamo il *Grafo di Turan* $T_2(n)$, nel modo seguente

$$T_2(n) = \begin{cases} K_{m, m} & \text{se } n = 2m \text{ è pari} \\ K_{m+1, m} & \text{se } n = 2m + 1 \text{ è dispari} \end{cases}$$

Da quanto osservato e provato sopra si ricava subito la seguente conclusione.

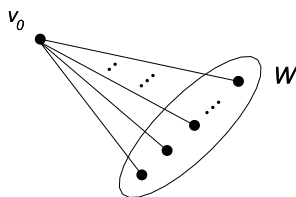
Proposizione 3.8. *Sia $n \geq 2$, e sia Γ un grafo bipartito con n vertici ed il massimo numero possibile di lati. Allora il numero di lati di Γ è $\lfloor n^2/4 \rfloor$, e Γ è $T_2(n)$.*

Ora, in questa analisi abbiamo considerato i grafi bipartiti perché essi sono certamente privi di triangoli. Ma, chiaramente, vi sono molti grafi privi di triangoli che non sono bipartiti. Il Teorema di Turán (1941) mostra che il prendere in considerazione tutti questi, invece dei soli grafi bipartiti, non cambia la situazione.

Teorema 3.9. (Turán). *Sia $n \geq 2$, e sia G un grafo privo di triangoli, con n vertici ed il massimo numero possibile di lati. Allora G è (isomorfo a) $T_2(n)$.*

DIMOSTRAZIONE. Fissato l'intero $n \geq 2$, Sia $G = (V, E)$ un grafo con $|V| = n$, ed il massimo numero possibile $q = |E|$ di lati, essendo soggetto alla condizione di non contenere triangoli. Poiché il grafo di Turán $T_2(n)$ ha n vertici e non contiene triangoli, il numero di lati di G è almeno uguale a quello di $T_2(n)$; quindi $q \geq \lfloor n^2/4 \rfloor$.

Sia $v_0 \in V$ un vertice di grado massimo in G , e sia W l'insieme dei vertici adiacenti a v_0 in G (quindi $|W| = d_G(v_0)$). Consideriamo ora il grafo bipartito completo con insieme dei vertici bipartito da $W \cup (V \setminus W)$, e lo chiamiamo T . G e T sono grafi sullo stesso insieme V di vertici; proviamo che per ogni $v \in V$ si ha $d_G(v) \leq d_T(v)$. Supponiamo prima $v \in W$; allora v non può essere adiacente ad altri vertici di W , perché in tal caso G conterrebbe un triangolo.



Quindi $d_G(v) \leq |V \setminus W| = d_T(v)$. Supponiamo che $v \notin W$; allora, per la scelta di v_0 ,

$$d_G(v) \leq d_G(v_0) = |W| = d_T(v).$$

Dunque, per ogni $v \in V$, $d_G(v) \leq d_T(v)$. Ciò in particolare comporta (Teorema 1.1) che il numero q di lati di G non supera quello dei lati di T . Poiché T è bipartito su n vertici, la Proposizione 3.8 assicura che quest'ultimo è al più $\lfloor n^2/4 \rfloor$. Ma $q \geq \lfloor n^2/4 \rfloor$, e quindi $q = \lfloor n^2/4 \rfloor$, che è quindi anche il numero di lati di T . Questo implica che

$$d_G(v) = d_T(v)$$

per ogni $v \in V$. Pertanto, se $v \in W$, allora il numero di lati in G incidenti a v è uguale a $d_T(v) = |V \setminus W|$; poiché, come abbiamo osservato in precedenza, v non è adiacente ad alcun altro vertice in W , si conclude che v è adiacente a tutti i vertici di $V \setminus W$. Considerando i lati di G adiacenti a v , al variare di v in W , otteniamo dunque tutti i lati di T . Quindi T è un sottografo di G ; ma T e G hanno lo stesso numero di lati, e dunque $T = G$. A questo punto, per concludere basta osservare che, essendo massimo il numero di lati di T , per la Proposizione 3.8 si ha $T = T_2(n)$. ■

Per comprendere l'enunciato della forma generale del Teorema di Turán occorre innanzi tutto generalizzare nella maniera naturale l'idea di grafo bipartito.

Sia $r \geq 2$, un grafo si dice **r-partito** se l'insieme V dei suoi vertici ammette una partizione in r sottoinsiemi non vuoti V_1, \dots, V_r tale che gli estremi di ogni lato del grafo appartengono a due diversi elementi della partizione.

Se n_1, n_2, \dots, n_r sono interi positivi il grafo (*completo r-partito*) K_{n_1, n_2, \dots, n_r} è il grafo il cui insieme dei vertici è l'unione disgiunta (r -partizione) $V = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_r$, dove $|V_i| = n_i$, per ogni $i = 1, \dots, r$, ed i cui lati sono tutti e soli quelli i cui estremi appartengono a termini diversi della partizione sui vertici. Si verifica facilmente che il numero di lati di questo grafo è

$$\sum_{1 \leq i < j \leq r} n_i n_j. \quad (1)$$

La figura 3.5 mostra il grafo completo 3-partito $K_{4,3,3}$, che è uno dei grafi di Turán, dato che ha il massimo numero di lati tra tutti i grafi 3-partiti con 10 vertici.

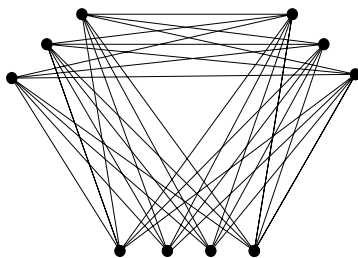


Figura 3.7: il grafo di Turán $T_3(10)$.

Dati i numeri n (numero di vertici) e r (numero di elementi nella partizione dei vertici), con $n \geq r$, dividiamo il primo per il secondo: $n = rm + s$, dove m ed $0 \leq s \leq r - 1$ sono univocamente determinati. Allora

$$n = (r - s)m + s(m + 1)$$

(osserviamo che $m = \lfloor n/r \rfloor$). Il grafo di Turán $T_r(n)$ è il grafo completo r -partito $K_{m, m, \dots, m+1, m+1}$, dove m compare $(r - s)$ volte, e $m + 1$ compare s volte. Il numero di vertici di $T_r(n)$ è quindi n ; con un poco di conti (vedi esercizio 3.18), si trova che, se s è il resto della divisione di n per r , il numero di lati è

$$q(n, r) = \frac{1}{2r} ((r - 1)n^2 - s(r - s)). \quad (2)$$

La proprietà rispetto alla quale intendiamo ora descrivere i grafi estremali, è quella di non possedere sottografi isomorfi al grafo completo K_{r+1} ($r \geq 2$). Chiaramente ogni grafo r -partito soddisfa questa proprietà, ma, ancora, ne esistono molti altri.

Teorema 3.10. (Turán). *Siano $n \geq r \geq 2$, e sia G un grafo con n vertici, q lati, e privo di sottografi completi K_{r+1} . Allora $q \leq q(n, r)$. Se $q = q(n, r)$ allora G è il grafo $T_r(n)$.*

La dimostrazione di questo risultato è, come da aspettarsi, tecnicamente più complicata di quella del caso $r = 2$ (Teorema 3.9), ma concettualmente usa gli stessi metodi (più induzione su r). Essa è suggerita negli esercizi 3.19. 3.20.

Un problema simile a quello risolto da Turán riguarda i grafi bipartiti, ed è il problema di Zarankiewicz. Nella sua forma generale chiede qual è il massimo numero di lati di un grafo bipartito che non contenga sottografi isomorfi al grafo completo bipartito $K_{r,s}$. Se Γ è un grafo bipartito con uno stesso numero di vertici m su entrambi i blocchi della bipartizione, e $2 \leq r \leq m$, si denota con $z(m, r)$ il massimo numero di lati che Γ può avere in modo da non contenere sottografi isomorfi a $K_{r,r}$. Vi sono diversi lavori sull'argomento, ma il valore esatto di $z(m, r)$ in generale non è noto, neppure per $r = 2$ (si veda la digressione più avanti per alcuni casi in cui il valore esatto può essere trovato).

Esercizio 3.16. Sia Γ un grafo con 10 vertici e q lati. Si dica qual è il massimo valore possibile per q , in modo che:

- i) Γ non contenga triangoli.
- ii) Γ contenga esattamente un triangolo;
- iii) Γ contenga esattamente due triangoli;

Esercizio 3.17. Si trovi un grafo Γ con 8 vertici e diametro 4 che ha il massimo numero di lati. Si provi che Γ è unico a meno di isomorfismo.

Esercizio 3.18. Si dimostri l'uguaglianza (2) [si utilizzi la formula (1) e si facciano i conti, oppure, meglio, si provi, utilizzando possibilmente un ragionamento sui grafi che $q(n+r, r) - q(n, r) = (r-1)(n-r) + \binom{r}{2}$ e si applichi l'induzione].

Esercizio 3.19. Sia $G = (V, E)$ un grafo r -partito sull'insieme di n vertici $V = V_1 \cup \dots \cup V_r$. Si fissi un elemento $v_i \in V_i$ per ogni $i = 1, \dots, r$. Il sottografo indotto da $S = \{v_1, \dots, v_r\}$ è un grafo completo K_p (e quindi ha $\binom{r}{2}$ lati), ed ogni vertice che non appartiene ad S è adiacente a $r-1$ vertici di S . Dunque il numero di lati che connettono vertici in S con vertici fuori di S è $(n-r)(r-1)$. Sia G' il sottografo indotto da $V \setminus S$; esso è r -partito con $n-r$ vertici, sia q' il numero dei suoi lati. Si ha allora che $|E| = q' + \binom{r}{2} + (n-r)(r-1)$. Si utilizzi quindi l'induzione e l'esercizio 3.18 per provare che il massimo numero di lati di un grafo r -partito con n vertici è $q(n, r)$.

Esercizio 3.20. 1) Sia $r \geq 2$, e sia $\Gamma = (V, E)$ un grafo privo di sottografi isomorfi al grafo completo K_{r+1} . Generalizzando la dimostrazione della prima parte del Teorema 3.9, e facendo induzione su r (il caso iniziale $r = 2$ è già stato provato), si dimostri che esiste un grafo r -partito T sullo stesso insieme di vertici V , tale che, per ogni $v \in V$, $d_G(v) \leq d_T(v)$.

2) Si provi il Teorema 3.10.

Digressione: piani proiettivi finiti. Cominciamo con il trovare un limitazione superiore al numero di Zarankiewicz $z(m, 2)$. Osserviamo innanzi tutto che se d_1, \dots, d_m sono numeri reali positivi allora

$$(d_1 + \dots + d_m)^2 \leq m(d_1^2 + \dots + d_m^2). \quad (3)$$

(lo si dimostri, ad esempio facendo induzione su m).

Proposizione 3.11. Sia $m \geq 2$; allora $z(m, 2) \leq \frac{m}{2}(1 + \sqrt{4m-3})$.

DIMOSTRAZIONE. Sia $G = (V_1 \cup V_2, E)$ sia un grafo bipartito, con $|V_1| = |V_2| = m$, $q = |E|$, e supponiamo che G non contenga sottografi isomorfi a $K_{2,2}$. Ciò significa che ogni coppia di vertici distinti di V_2 è adiacente ad al più un vertice di V_1 . Ora, il numero di coppie di vertici di

V_2 adiacenti ad un $x \in V_1$ è chiaramente uguale a $\binom{d_G(x)}{2}$, mentre il numero totale di coppie di vertici distinti di V_2 è $\binom{m}{2}$. Quanto abbiamo sopra osservato implica dunque che

$$\sum_{x \in V_1} \binom{d_G(x)}{2} \leq \binom{m}{2}.$$

Pertanto, tenendno conto che $\sum_{x \in V_1} d_G(x) = q$, ed applicando la diseguaglianza (3),

$$m(m-1) = 2 \binom{m}{2} \geq \sum_{x \in V_1} d_G(x)^2 - \sum_{x \in V_1} d_G(x) \geq \frac{1}{m} q^2 - q,$$

da cui segue $q(q-m) \leq m^2(m-1)$, e quindi, con un poco di conti,

$$q \leq \frac{m}{2} (1 + \sqrt{4m-3})$$

che è quello che volevamo. ■

Proviamo ora che, per infiniti valori di m , tale limitazione è la migliore possibile.

Sia $F = GF(p)$ un campo finito con p elementi (dalla teoria generale si sa che p è la potenza di un numero primo), e sia $V \simeq F^3$ uno spazio vettoriale di dimensione 3 sul campo F . Allora, il numero di elementi di F è p^3 . Se v è un vettore non nullo di V , il sottospazio vettoriale (unidimensionale) generato da v è $\langle v \rangle = \{\alpha v \mid \alpha \in F\}$, e contiene $|F| = p$ elementi, di cui $p-1$ non nulli. Poiché ogni vettore non nullo appartiene ad uno ed un solo sottospazio unidimensionale (quello da esso generato), si conclude che il numero di sottospazi unidimensionali di V è

$$m = \frac{|V| - 1}{p - 1} = \frac{p^3 - 1}{p - 1} = p^2 + p + 1.$$

Il numero di sottospazi di dimensione 2 di V è lo stesso m . Questo si può vedere osservando che, siccome V ha dimensione 3, i sottospazi di dimensione 2 sono in corrispondenza biunivoca con i sottospazi di dimensione 1 del duale V^* che è isomorfo a V come spazio vettoriale; oppure contando le coppie di vettori indipendenti di V (che sono in numero di $(p^3 - 1)(p^2 - 1)$, ed osservando che ogni sottospazio di dimensione 2 contiene esattamente $(p^2 - 1)(p - 1)$ coppie di vettori indipendenti (le sue possibili basi). Denotiamo, rispettivamente con V_1 e V_2 , l'insieme dei sottospazi di dimensione 1 di V e quello dei sottospazi di dimensione 2. Quindi

$$|V_1| = |V_2| = p^2 + p + 1 = m.$$

L'insieme $V_1 \cup V_2$ insieme con la relazione d'incidenza definita dall'inclusione, si chiama *piano proiettivo* su $GF(p)$, e viene denotato con $P(2, p)$: gli elementi di V_1 sono detti *punti* e quelli di V_2 le *rette*; e $x \in V_1$ è incidente a $y \in V_2$ se, come sottoinsiemi di V , $x \subseteq y$. Denotiamo con Γ il grafo sui vertici $V_1 \cup V_2$, definito da tale relazione d'incidenza; Γ è bipartito su V_1 e V_2 , e non contiene $K_{2,2}$; infatti, ogni coppia di elementi distinti $x = \langle u \rangle, y = \langle v \rangle$ di V_1 è incidente ad uno ed un solo elemento di V_2 (che è lo spazio generato da u e v). Infine, poiché ogni spazio di dimensione 2 contiene esattamente $(p^2 - 1)/(p - 1) = p + 1$ sottospazi di dimensione 1, si ha che Γ è regolare di valenza $p + 1$. Dunque il numero q di lati di Γ è:

$$q = \sum_{y \in V_2} d_\Gamma(y) = (p+1)|V_2| = (p+1)m = (p+1)(p^2 + p + 1).$$

Si vede quindi che, in questo caso, $q(q-m) = m^2(m-1)$, e che pertanto $q = \frac{m}{2}(1 + \sqrt{4m-3})$. Dunque, se $m = p^2 + p + 1$ dove p è la potenza di un numero primo, la limitazione della Proposizione 3.11 è raggiungibile, e quindi, se p è la potenza di un numero primo:

$$z(p^2 + p + 1, 2) = (p+1)(p^2 + p + 1).$$

ULTERIORI ESERCIZI

Esercizio 3.21. Si costruisca un grafo bipartito planare regolare 3-valente con 12 vertici. Si provi che per ogni n pari esiste un un grafo bipartito planare regolare 3-valente con $2n$ vertici.

Esercizio 3.22. In quanti modi diversi è possibile disporre 4 donne e 4 uomini attorno ad un tavolo, in modo che ognuno abbia accanto a sé persone dell'altro sesso? (ovvero: quanti sono i circuiti hamiltoniani distinti nel grafo bipartito completo $K_{4,4}$?).

Esercizio 3.23. Sia $\Gamma = (V_1 \cup V_2, E)$ un grafo bipartito *bilanciato*, cioè tale che $|V_1| = |V_2|$, e sia $d \geq 2$ il minimo tra i gradi dei vertici di Γ . Si provi che Γ ha un ciclo di lunghezza almeno $d + 1$.

Esercizio 3.24. Sia $\Gamma = (V_1 \cup V_2, E)$ un grafo bipartito, con $|V_1| \leq |V_2|$, e sia $0 \leq d \leq |V_1|$ tale che $|N_\Gamma(S)| \geq |S| - d$ per ogni $S \subseteq V_1$. Si provi che Γ ammette un accoppiamento formato da $|V_1| - d$ lati.

Esercizio 3.25. Sia $\Gamma = (V, E)$ un grafo bipartito, e sia d il massimo grado dei suoi vertici. Si provi che l'insieme E dei lati si può ripartire in d accoppiamenti (parziali) disgiunti.

Esercizio 3.26. La seguente dimostrazione del teorema di Hall è dovuta ad Halmos e Vaughan; se ne completino i dettagli. Sia $\Gamma = (V_1 \cup V_2, E)$ un grafo bipartito, con $|V_1| \leq |V_2|$, e tale che $|N_\Gamma(S)| \geq |S|$ per ogni sottoinsieme S di V_1 . Si provi che Γ ammette un accoppiamento completo procedendo per induzione su $n = |V_1|$. Osservato che per $n = 1$ l'affermazione è banale, si assuma quindi che ogni grafo bipartito con un numero minore di vertici in uno dei due termini della ripartizione verifica il teorema.

- Supponiamo che per ogni $\emptyset \neq S \subsetneq V_1$ sia $|N_\Gamma(S)| \geq |S| + 1$. Si provi che allora Γ ha un accoppiamento.

- Supponiamo dunque che esista $\emptyset \neq S \subsetneq V_1$ tale che $|N_\Gamma(S)| = |S|$. Si provi che allora sia il grafo indotto da $S \cup N_\Gamma(S)$, che quello indotto da $(V_1 \setminus S) \cup (V_2 \setminus N_\Gamma(S))$, soddisfano le ipotesi del teorema. Si concluda applicando l'ipotesi induttiva.

Esercizio 3.27. Sia $\Gamma = (V_1 \cup V_2, E)$ un grafo bipartito con $|V_1| = m \leq n = |V_2|$, $|E| = q$, che non ammette un accoppiamento completo. Si trovi quel è il massimo valore che può assumere q . Si provi che se, inoltre, Γ è connesso, allora $q \leq m(n - 2) + 2$, e che tale limitazione è la migliore possibile.

Esercizio 3.28. Sia Γ un grafo con n vertici e tale che, per ogni vertice v , si ha $d_\Gamma(v) > \frac{3}{4}n$. Si provi che Γ contiene un sottografo isomorfo a K_5 .

Esercizio 3.29. Si provi che il grafo dell'ottaedro (Figura 1.7) è un grafo di Turán. Si provi che il grafo del dodecaedro è un grafo 3-partito, e che è un sottografo di un grafo di Turán.

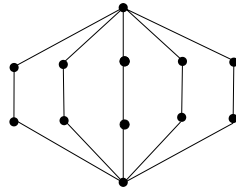
Esercizio 3.30. Sia Γ un grafo tripartito con $n = 3m$ vertici ripartiti in tre classi con m vertici ciascuna. Assumendo che Γ non contenga triangoli, dire qual è il massimo numero di lati che Γ può avere.

Esercizio 3.31. Provare che un grafo con n vertici e privo di cicli di ordine pari ha al più $\frac{3}{2}(n - 1)$ lati. Si provi che per ogni n esiste un grafo con n vertici e $\lfloor \frac{3(n-1)}{2} \rfloor$ lati, privo di cicli di ordine dispari.

Esercizio 3.32. Si dica qual è il massimo numero di lati che può avere un grafo bipartito con 10 o 12 vertici e privo di sottografi isomorfi a $K_{3,3}$.

Esercizio 3.33. Sia $\Gamma = (V_1 \cup V_2, E)$ un grafo bipartito con $|V_1| = |V_2| = m$, q lati, e privo di cicli di lunghezza minore o uguale a 6. Si provi chhe $q \leq \frac{m}{2}(1 + \sqrt{1 + 2m})$. Si provi che se b è un numero dispari, e $m = (b^2 - 1)/2$, allora esiste un grafo bipartito con $2m$ vertici, regolare di valemza $(b + 1)/2$, privo di cicli di lunghezza minore o uguale a 6, che ha esattamente $\frac{m}{2}(1 + \sqrt{1 + 2m}) = \frac{(b^2 - 1)(b + 1)}{4}$ lati. [sugg.: si definisca un grafo su V_1 congiungendo due vertici se questi sono adiacenti ad uno stesso vertice di V_2 , si osservi che tale grafo è privo di triangoli].

Esercizio 3.34. Ricordiamo che il *calibro* di un grafo Γ è la lunghezza minima di un ciclo in esso contenuto, ed è denotato con $g = g(\Gamma)$. Diciamo che un grafo connesso con n vertici è *chiatto* se $g \geq n/2$ (ovvero se non è un albero, e tutti i suoi cicli contengono almeno la metà dei vertici) ; ad esempio, il grafo di Petersen è chiatto; un altro esempio (con 12 vertici) è nella figura seguente:



Si costruiscano grafi chiatto con 6, 8, 10 e 12 vertici che abbiano il massimo numero possibile di lati. Si provi quindi a formulare una congettura sul numero di lati di un grafo chiatto con n vertici, per $n \geq 20$ (ad esempio una buona limitazione superiore), e si cerchi di dimostrarla.

4 Colorazioni

Il problema forse più pubblicamente noto della teoria dei grafi è quello della colorazione di una carta geografica politica (che, per brevità, conveniamo di chiamare "mappa"): qual è il minimo numero di colori distinti necessario per colorare una mappa in modo che non vi siano nazioni confinanti dello stesso colore? È facile tradurre la questione in termini di grafi: ad una data mappa si associa un grafo i cui vertici sono le diverse nazioni e due vertici sono adiacenti se e solo se le corrispondenti nazioni sono confinanti.

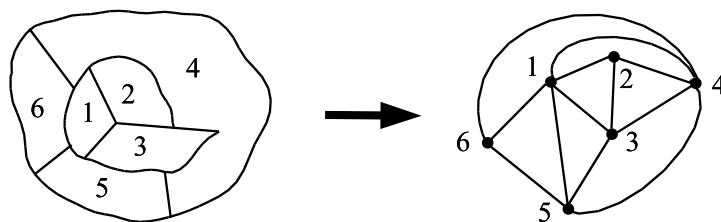


Figura 4.1: una mappa e il suo grafo.

È intuitivo e non è difficile da provare che il grafo così ottenuto è un grafo piano (avendo ovviamente definito con precisione cosa si intende con "mappa"). La domanda diventa allora la seguente: qual è il minimo numero di colori con cui è possibile "colorare" i vertici di un grafo piano in modo che vertici adiacenti abbiano in ogni caso colori diversi? La congettura che siano sempre sufficienti quattro colori ha una storia quasi mitica; comunque, pare (si veda Biggs, Lloyd e Wilson, *Graph Theory 1736-1936*) sia stata esplicitamente formulata per la prima volta da un certo Francis Guthrie, che, tramite il fratello, l'avrebbe comunicata ad Augustus de Morgan, suo professore di matematica al University College di Londra⁶. Mentre dimostrare che cinque colori sono sempre sufficienti (Heawood 1890) è oggi relativamente semplice, la congettura dei quattro colori ha resistito (nonostante numerosi tentativi in entrambi i sensi) sino al 1976 quando è stata provata da Appel e Haken ed è quindi diventata il *Teorema dei quattro colori*⁷ (si osservi che la mappa della figura 5.1 richiede effettivamente quattro colori).

Il problema della colorazione dei vertici di un grafo ha interesse anche al di fuori dei grafi piani. Supponiamo, per esempio, che nella città capitale del pianeta Olosac si tenga un convegno di matematica intergalattica a cui sono invitati i rappresentanti di ogni pianeta e razza (almeno, di quelle interessate alla materia) della galassia, e che questi debbano essere ospitati in vari alberghi. Ora, è ben noto che, con tutta la buona volontà, vi sono razze nell'universo per le quali la prossimità fisica è pressoché incompatibile. Ad esempio, è chiaro che un conigliode fumaliano non dormirà sonni tranquilli se nella staza accanto alberga uno smilodonte elbaniano; a sua volta, una lattuga mistica di Macros II preferirà non correre il rischio di scendere in ascensore in compagnia del conigliode⁸. Agli organizzatori si presenta dunque il problema: qual è il minimo numero di alberghi che occorre prevedere in modo che delegazioni di razze incompatibili non alloggino nello stesso albergo? Un simile problema può essere affrontato considerando un grafo i cui vertici siano le diverse delegazioni, e i cui lati connettano delegazioni i cui membri appartengono a razze galattiche incompatibili (il grafo che si ottiene non sarà, in genere, piano); e cercando quindi di stabilire qual è il minimo numero di colori (gli alberghi) con cui è possibile colorare i vertici del grafo in modo che vertici adiacenti abbiano colori diversi.

⁶Se poi qualche cinese, o turco, o indiano, per non dire una donna, l'abbia pensata prima e magari l'abbia anche messa per iscritto è una questione che non ha rilevanza per la storiografia occidentale.

⁷La dimostrazione ha richiesto un impiego massiccio del calcolatore, e non potrebbe essere verificata da esseri umani (nemmeno se ci si mettesse tutti insieme a lavorare per qualche anno); pertanto è stata ed è oggetto di una certa discussione

⁸Senza contare che gli smilodonti cadono a terra privi di sensi alla vista di una lattuga mistica.

Supponiamo ora che, nell'ambito dei lavori del convegno intergalattico di matematica, ciascuna delegazione intenda avere degli incontri bilaterali con alcune altre delegazioni⁹, e che ogni delegazione possa incontrarne al più un'altra ogni giorno; qual è il minimo numero di giorni che gli organizzatori devono prevedere affinché tutti gli incontri bilaterali abbiano luogo? Anche questa questione può essere tradotta in un problema di colorazione di un grafo: in questo caso ad essere colorati sono i lati. I vertici del grafo sono ancora le diverse delegazioni, ma questa volta i lati connettono coppie di delegazioni che intendono incontrarsi durante il convegno; il problema diventa il seguente: qual è il minimo numero di colori (i diversi giorni) con cui è possibile colorare *i lati* del grafo in modo che lati consecutivi (cioè con un vertice in comune) abbiano colori diversi? Illusteremo brevemente l'argomento della colorazione dei lati di un grafo nella seconda sezione del capitolo.

Nella terza sezione discuteremo invece un argomento che solo in parte è legato a problemi di colorazione, ma è di notevole importanza, e non solo in teoria dei grafi: la teoria di Ramsey. Per illustrarne un aspetto, supponiamo che, nel corso delle giornate intergalattiche di matematica sul pianeta Olosac, alcuni congressisti, appartenenti a varie razze, si ritrovino casualmente una sera in una certa birreria: se i congressisti sono almeno sei allora sicuramente esistono almeno tre di essi che appartengono a razze mutuamente compatibili, oppure mutuamente incompatibili (prima di andare avanti, si cerchi di dimostrare questa affermazione dopo averla tradotta in termini di grafi). Più in generale, la questione è la seguente: data una colorazione dei lati di un grafo completo K_n mediante due colori, qual è il valore minimo di n affinché il grafo contenga un sottografo completo K_r che sia monocromatico? L'affermazione fatta sopra è che se n è maggiore o uguale a 6 allora c'è sicuramente un triangolo monocromatico.

4.1 Colorazioni dei vertici.

Una **colorazione** (dei vertici) di un grafo Γ è una assegnazione di un colore a ciascun vertice di Γ in modo che vertici adiacenti non abbiano lo stesso colore (in altri termini: in modo che gli estremi di ogni lato siano colorati con colori diversi). Detto in modo formale, una colorazione di $\Gamma = (V, E)$ è una applicazione $\gamma : V \rightarrow S$, dove S è un insieme non vuoto (i cui elementi sono detti *colori*), tale che per ogni $\{u, v\} \in E$, $\gamma(u) \neq \gamma(v)$.

Sia $1 \leq k \in \mathbb{N}$; un grafo Γ si dice k -colorabile se esiste una colorazione di Γ con k colori. Banalmente, un grafo è 1-colorabile se e solo se non contiene alcun lato; inoltre, è chiaro che un grafo è 2-colorabile se e soltanto se è un grafo bipartito. Più in generale, è chiaro che un dire che un grafo è k -colorabile equivale a dire che ammette una k -partizione dei vertici (vedi sezione 3.4): il concetto è il medesimo, ma fare riferimento ai colori sembra espediente più consono alla sua visualizzazione. Il Teorema dei quattro colori menzionato nell'introduzione può dunque essere formulato nel modo seguente

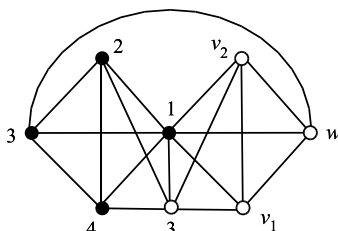
Teorema 4.1. *Ogni grafo piano è 4-colorabile.*

È ovvio che ogni grafo finito Γ ammette una colorazione con un numero finito di colori, ed è altresì ovvio che esiste un numero *minimo* di colori mediante i quali è possibile colorare Γ : tale numero è detto **numero cromatico** di Γ e si indica con $\chi(\Gamma)$. Dunque, dato un grafo Γ , $\chi(\Gamma) = k$ se e solo se Γ è k -colorabile e non è $(k - 1)$ -colorabile.

⁹Va da sé che gli organizzatori olosacchiani hanno accettato di prevedere incontri *bilaterali* solo dopo una lunga ed estenuante trattativa.

Ad esempio, è chiaro che $\chi(K_n) = n$ (dove K_n è il grafo completo con n vertici), ed è piuttosto facile vedere che, se C_n è il ciclo di lunghezza n , allora $\chi(C_n)$ è uguale a 2 o a 3 a seconda che n sia pari o dispari (lo si dimostri).

Per provare che un grafo Γ ha numero cromatico k , occorre in sostanza provare due cose: che esiste una colorazione di Γ mediante k colori, e che non è possibile colorare Γ con meno di k colori. Consideriamo, ad esempio il seguente grafo



la figura mostra una possibile colorazione con 5 colori (rappresentati da numeri), dove i vertici v_1, v_2, w hanno, rispettivamente, colori 4, 2 e 5. Supponiamo ora di voler colorare il grafo con 4 colori $\{1, 2, 3, 4\}$; allora è chiaro che, essendo a due a due adiacenti, i vertici segnati in nero devono avere colori diversi, che indichiamo con 1, 2, 3, 4 come nella figura. Il vertice in basso al centro, adiacente ai vertici già colorati con 1, 2, 4 deve pertanto avere colore 3 (come nella figura). Ora, i vertici v_1 e v_2 non possono essere colorati con 3 e nemmeno con 1, inoltre devono avere colori diversi; quindi i loro colori devono essere 2 e 4, il che forza ad assegnare al vertice w il colore 3, e questo non è consentito dato che w è adiacente al vertice di colore 3 all'estremità sinistra del grafo.

Per quanto osservato in precedenza, $\chi(\Gamma) = 2$ se e soltanto se Γ contiene almeno un lato ed è bipartito; dal Teorema 3.1 si ha quindi che $\chi(\Gamma) = 2$ se e soltanto se Γ non ha cicli di lunghezza dispari (posto che Γ abbia almeno un lato). Criteri simili non sono noti per numeri cromatici più grandi di 2, ed è in genere piuttosto difficile determinare il numero cromatico di un grafo.

Chiaramente, il numero cromatico di un grafo è maggiore o uguale a quello di ogni suo sottografo; e, come anche suggerito dall'esempio di sopra, un limite inferiore al numero cromatico di un grafo è certamente dato dall'esistenza di sottografi completi: se infatti Γ contiene un sottografo isomorfo al grafo completo K_n , allora $\chi(\Gamma) \geq \chi(K_n) = n$. D'altra parte, tale limite è in generale lontano dall'effettivo valore di $\chi(\Gamma)$: esistono grafi privi di triangoli il cui numero cromatico è arbitrariamente grande¹⁰ (anche se descriverli non è completamente immediato; si veda l'esercizio 4.15).

Non è molto complicato descrivere un algoritmo di tipo greedy che, dato un grafo Γ ne fornisce una colorazione (pur se in genere non ottimale). Si comincia col fissare un ordinamento qualsiasi v_1, v_2, v_3, \dots ai vertici di Γ , e si considerano i colori 1, 2, 3, \dots . Si assegna colore 1 al vertice v_1 , e colore 2 o 1 al vertice v_2 a seconda che sia o no adiacente a v_1 ; dopo di che si procede scorrendo la lista dei vertici ed assegnando ad ogni nuovo vertice il primo colore dell'elenco che sia ammissibile. In questo modo si ottiene certamente una colorazione di Γ , che tuttavia non è in generale realizzata con il minimo numero possibile di colori; dato che il numero di colori necessario dipende fortemente dalla scelta iniziale dell'ordinamento dei vertici (vedi esercizio 4.18). Ma non

¹⁰Più in generale, Erdős e Lovász hanno dimostrato, con metodi probabilistici, che per ogni $k, g \geq 4$ esiste un grafo con calibro g e numero cromatico k .

è possibile fare molto meglio; ed algoritmi che diano una colorazione ottimale, e quindi forniscano anche il valore esatto del numero cromatico del grafo, non sono noti.

Tuttavia, il semplice algoritmo che abbiamo descritto ci consente di fare un'osservazione non del tutto banale. Per esporla meglio, fissiamo la seguente notazione: se Γ è un grafo, indichiamo con $\Delta(\Gamma)$ il *massimo dei gradi* dei vertici di Γ .

Immaginiamo quindi di operare mediante l'algoritmo di sopra su un grafo Γ , e supponiamo di avere a disposizione un insieme S di colori abbastanza grande. Notiamo allora che ad ogni passo i primi $\Delta(\Gamma) + 1$ colori di S saranno sufficienti a procedere; infatti ad ogni nuovo vertice v è assegnato il primo colore ammissibile, ovvero il primo colore diverso da quelli di ogni vertice già colorato a cui v sia adiacente. Ora, il grado di v è al più $\Delta(\Gamma)$, e quindi ci sono al più $\Delta(\Gamma)$ colori che non possiamo assegnare; dunque almeno un colore tra i primi $\Delta(\Gamma) + 1$ che abbiamo a disposizione è ammissibile, e possiamo procedere. In conclusione, l'algoritmo descritto colora Γ con al più $\Delta(\Gamma) + 1$ colori¹¹. In altre parole abbiamo provato

$$\text{Sia } \Gamma \text{ un grafo. Allora } \chi(\Gamma) \leq \Delta(\Gamma) + 1.$$

I grafi completi K_n ed i cicli di lunghezza dispari C_{2n+1} sono esempi di grafi Γ il cui numero cromatico è uguale a $\Delta(\Gamma) + 1$. Il Teorema seguente mostra come essi siano essenzialmente i soli grafi con tale proprietà. Si noterà come il migliorare di un semplice valore 1 il limite trovato sopra sia tutt'altro che banale.

Teorema 4.2. (Brooks 1941) *Sia Γ un grafo connesso che non sia un ciclo di lunghezza dispari o un grafo completo. Allora*

$$\chi(\Gamma) \leq \Delta(\Gamma).$$

DIMOSTRAZIONE. Procediamo per induzione sul numero di vertici di Γ . Possiamo quindi assumere che $\Gamma = (V, E)$ sia un grafo connesso che non è né completo né un ciclo di lunghezza dispari, e tale che tutti i grafi con un numero inferiore di vertici soddisfano il Teorema. Poniamo $d = \Delta(\Gamma)$.

Osserviamo subito che possiamo assumere $d \geq 3$. Infatti, se $d = 2$, allora dalla formula dei gradi $|V| \leq |E|$; essendo Γ connesso, si ha che $|V| = |E|$ e Γ è un ciclo pari, oppure $|V| = |E| + 1$ e allora Γ è un albero; in ogni caso Γ è 2-colorabile.

Sia dunque $d \geq 3$. Scegliamo un vertice $v \in V$ con $d_\Gamma(v) = d$, e consideriamo il grafo $H = \Gamma - v$ (ottenuto da Γ togliendo il vertice v e tutti i lati ad esso adiacenti). Allora H è d -colorabile (infatti, se $\Delta(H) = d$, chiaramente H non può essere un grafo completo, dato che qualche vertice di H è connesso a v , e dunque è d -colorabile per ipotesi induttiva; mentre se $\Delta(H) < d$ allora H è d -colorabile mediante l'algoritmo). Siano v_1, v_2, \dots, v_d i vertici (di H) adiacenti a v in Γ . Se, in una d -colorazione di H , due di questi vertici hanno lo stesso colore, allora almeno uno dei d colori che non compaiono in v_1, \dots, v_d ; colorando v con tale colore otteniamo una d -colorazione di Γ . Pertanto possiamo assumere che:

- 1) ogni d -colorazione di H assegna colori distinti ai vertici v_1, \dots, v_d .

¹¹Si osservi che, nelle considerazioni fatte, non è tanto il grado effettivo del nuovo vertice v che conta, quanto il grado di v nel sottografo indotto da lui e dai vertici già colorati; ciò suggerisce che, nell'ordinare i vertici del grafo prima di iniziare l'algoritmo, può essere una buona idea quella di mettere per primi i vertici con grado maggiore.

Conveniamo di chiamare i il colore del vertice v_i in una data d -colorazione di H . Osserviamo anche che, per ogni i il grado di v_i in H è al più $d - 1$; se in una d -colorazione di H , v_i è adiacente a due vertici dello stesso colore, allora i vertici adiacenti a v_i impiegano al massimo $d - 2$ colori, lasciando fuori, poniamo, il colore $j \neq i$, ma allora è possibile cambiare il colore di v_i con j , ottenendo ancora una d -colorazione di H che viola il punto 1). Dunque

2) per ogni $1 \leq i \leq d$ ed ogni d -colorazione di H , i vertici adiacenti a v_i in H hanno colori distinti.

Similmente si osserva che, data una d -colorazione di H , se un vertice w di H è adiacente a tre vertici dello stesso colore, allora un colore diverso da quello di w non compare tra i vertici ad esso adiacenti, ed è possibile cambiare il colore di w con tale nuovo colore ottenendo ancora una d -colorazione di H .

Ora, per ogni $1 \leq i < j \leq d$, sia $H_{i,j}$ il sottografo indotto in H dai vertici i cui colori sono i e j , e sia $C_{i,j}$ la componente connessa di $H_{i,j}$ che contiene v_i . È chiaro che possiamo scambiare tra loro colori i e j su tutti e soli i vertici di $C_{i,j}$ ottenendo ancora una d -colorazione di H . Se v_j non appartenesse a $C_{i,j}$, si otterrebbe, mediante questo scambio, una d -colorazione di H in cui sia v_i che v_j hanno colore j , il che è escluso da 1). Pertanto

3) v_i e v_j appartengono alla stessa componente connessa $C_{i,j}$ di $H_{i,j}$.

Ora, dati $1 \leq i, j \leq d$, sia \mathcal{P} un cammino semplice in $C_{i,j}$ che connette v_i a v_j , e supponiamo che $\mathcal{P} \neq C_{i,j}$. Allora, essendo $C_{i,j}$ connesso e poiché, per il punto 2), sia v_i che v_j hanno grado 1 in $C_{i,j}$, esiste un vertice w interno al cammino \mathcal{P} che ha grado almeno 3 in $C_{i,j}$; sia w un tale vertice a minima distanza da v_i . Ora, w è adiacente a tre vertici dello stesso colore in $C_{i,j}$ (che è 2-colorato) e dunque in H ; per quanto osservato in precedenza è possibile ricolorare w con uno dei d colori che è diverso sia dal colore i che dal colore j , ottenendo una nuova d -colorazione di H . In questa colorazione w non appartiene pertanto a $C_{i,j}$, e siccome rimuovere w da $C_{i,j}$ rende il grafo restante sconnesso (si rifletta su questa affermazione), in questa nuova colorazione v_i e v_j non appartengono alla stessa componente connessa di $H_{i,j}$, in contraddizione con il punto 3). Dunque \mathcal{P} non contiene vertici di grado maggiore o uguale a 3 in $C_{i,j}$, e pertanto $\mathcal{P} = C_{i,j}$. Quindi

4) per ogni $1 \leq i \leq d$, il sottografo $C_{i,j}$ è costituito da un unico cammino semplice con estremi v_i e v_j .

Supponiamo ora che per tre distinti i, j, k i cammini semplici $C_{i,j}$ e $C_{i,k}$, oltre che in v_i abbiano un altro vertice in comune u . Allora, in H , u (che ha ovviamente colore i) è adiacente a due distinti vertici di colore j e due distinti vertici di colore k , e per la solita ragione possiamo ricolorare u con un colore diverso da i , ed in questa colorazione v_i non è più connesso a v_j in $C_{i,j}$, contro il punto 3). Pertanto

5) per distinti i, j, k i cammini semplici $C_{i,j}$ e $C_{i,k}$ si incontrano solo nel vertice v_i .

Osserviamo che i vertici v_1, v_2, \dots, v_d non sono tutti mutuamente adiacenti, perché in tal caso, essendo tutti adiacenti a v ed essendo $d = \Delta(\Gamma)$ (e Γ connesso), si avrebbe che Γ è costituito dai vertici v, v_1, \dots, v_d , ed è un grafo completo, il che è contro l'ipotesi. Quindi tra essi esiste almeno una coppia, che possiamo assumere sia v_1, v_2 , di vertici non adiacenti. In altre parole, $C_{1,2}$ contiene un vertice $u \neq v_2$ (di colore 2) adiacente a v_1 . A questo punto, scambiamo i colori 1 e 3 per i vertici di $C_{1,3}$, ottenendo una nuova

d -colorazione di H , rispetto alla quale indichiamo con $H'_{i,j}$ e $C'_{i,j}$ i grafi ricavati secondo le ovvie definizioni. Per 4) i $C'_{i,j}$ sono cammini semplici. Ora u (che mantiene il colore 2, essendo adiacente a v_1 (che ha colore 3) appartiene a $C'_{2,3}$. D'altra parte il cammino semplice da u a v_2 , ottenuto da $C_{1,2}$ togliendo il vertice v_1 ed il lato $\{v_1, u\}$, mantiene la sua vecchia colorazione nei colori 1 e 2 e quindi è il primo pezzo dell'unico cammino 1,2-colorato che parte da v_2 (che mantiene colore 2) anche nella nuova colorazione; in altre parole è un pezzo del cammino semplice $C'_{1,2}$. Ma allora il vertice u (che non è adiacente a v) appartiene sia a $C'_{2,3}$ che a $C'_{1,2}$. Questo contraddice 5) rispetto alla nuova colorazione, e conclude la dimostrazione del Teorema. ■

Chi ha letto la dimostrazione avrà notato come in essa non si faccia quasi alcun ricorso a risultati precedenti; ma a partire da definizioni di base (connessione, cammino semplice, etc.) viene sviluppato un ragionamento ad hoc che richiede una certa sottigliezza. Ciò è tipico di molte dimostrazioni in Teoria dei Grafi: spesso i problemi devono essere affrontati con mezzi teorici minimi, ma notevole ingegno.

Quanto al contenuto del teorema di Brooks, esso è senz'altro significativo; tuttavia in generale il limite $\Delta(\Gamma)$ è lontano dal valore effettivo di $\chi(\Gamma)$. Ma, sempre in generale, non è possibile fare molto meglio: ad esempio, non esiste una descrizione soddisfacente dei grafi Γ per cui $\chi(\Gamma) = \Delta(\Gamma)$.

Esercizio 4.1. Si determini il numero cromatico dei grafi dei solidi regolari (figura 1.7).

Esercizio 4.2. Al variare di $n \geq 3$, determini il numero cromatico della ruota con n -raggi W_n .

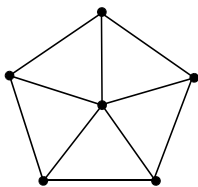


Figura 4.2: il grafo W_5 .

Esercizio 4.3. Si provi che il grafo di Grötzsch (figura sotto) ha numero cromatico 4.

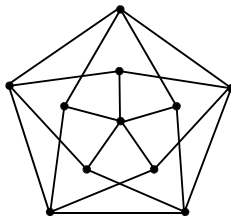


Figura 4.3: il grafo di Grötzsch.

Esercizio 4.4. Si provi che un grafo con dieci vertici e numero cromatico 4 contiene almeno un triangolo.

Esercizio 4.5. Sia $\Gamma = (V, E)$ un grafo e sia $c = \chi(\Gamma)$ il suo numero cromatico. Si provi che $|E| \leq \binom{c}{2}$.

4.2 Colorazioni dei lati.

Una **colorazione dei lati** di un grafo Γ è una assegnazione di un colore a ciascun lato di Γ in modo che lati consecutivi non abbiano lo stesso colore (in altri termini: in modo che per ogni vertice v di Γ i lati incidenti a v siano colorati con colori diversi). Formalmente, una colorazione dei lati di $\Gamma = (V, E)$ è una applicazione $\gamma' : E \rightarrow S$, tale che, per ogni $e_1, e_2 \in E$, $e_1 \cap e_2 \neq \emptyset \Rightarrow \gamma'(e_1) \neq \gamma'(e_2)$.

Sia C_n il ciclo di lunghezza n ; allora è facile provare che $\chi'(C_n)$ è uguale a 2 o a 3 a seconda che n sia pari o dispari. Trovare l'indice cromatico di un grafo completo non è altrettanto facile (anche se, come vedremo, non è molto difficile).

Immaginiamo di dover organizzare un torneo all'italiana tra un numero n di squadre di calcio; quante giornate sono richieste (al minimo) per giocare tutte le partite? Siccome ogni squadra deve affrontare $n - 1$ squadre, è chiaro che $n - 1$ è un limite inferiore al numero totale di giornate. Forse saremmo portati a ritenere che sia anche il numero giusto: questo è vero se n è pari (ma non è del tutto ovvio), ma non è vero se n è dispari. Supponiamo, ad esempio, che le squadre siano 9; allora il numero complessivo di partite da giocare è $\binom{9}{2} = 36$; se fossero sufficienti 8 giornate per disputarle tutte ci sarebbe almeno una giornata in cui vengono disputate 5 partite (dato che $8 \times 4 = 32 < 36$), ma 5 partite coinvolgono 10 squadre, il che è impossibile. Dunque, se n è dispari sono necessarie almeno n giornate per completare il torneo. Sono sufficienti? Come vedremo la risposta è sì. Per il momento osserviamo come questo problema si riduca naturalmente al problema della colorazione dei lati del grafo completo K_n che impieghi il minimo numero di colori: i vertici sono le diverse squadre, ed ogni colore indica le partite da giocarsi in una stessa giornata. Trovare una colorazione del genere fornisce quindi anche il calendario completo degli incontri. Discuteremo più avanti questo caso in dettaglio; per il momento, torniamo a considerazioni di carattere generale.

Supponiamo sia data una colorazione dei lati di un grafo Γ ; allora, per ogni vertice v di Γ , i lati incidenti a v hanno tutti colore diverso; quindi il numero di colori è almeno pari al grado di v . Pertanto, per ogni grafo Γ , si ha

$$\Delta(\Gamma) \leq \chi'(\Gamma)$$

(dove $\Delta(\Gamma)$ è il massimo dei gradi dei vertici di Γ).

In molti casi si trova che $\Delta(\Gamma)$ è uguale all'indice cromatico di Γ . Ad esempio si ha

Proposizione 4.3. (König 1916) *Sia Γ un grafo bipartito. Allora $\chi'(\Gamma) = \Delta(\Gamma)$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\Gamma = (V_1 \cup V_2, E)$ un grafo bipartito, e procediamo per induzione sul numero di lati $|E|$. Se $|E| = 0$ non c'è nulla da provare.

Sia quindi $|E| \geq 1$, sia $d = \Delta(\Gamma)$, e sia $e = \{x_1, x_2\} \in E$. Per ipotesi induttiva, i lati del grafo $\Gamma - e$ possono essere colorati mediante d colori. Ora, in $\Gamma - e$, i vertici x_1 e x_2 hanno grado al più $d - 1$; quindi ci sono due colori c_1 e c_2 (tra i d a disposizione) tale che c_1 non compare tra i colori dei lati incidenti a x_1 e c_2 non compare tra i colori dei lati incidenti a x_2 (ad esclusione, ovviamente, del lato e che non è ancora colorato). Se $c_1 = c_2$, basta assegnare ad e tale colore per ottenere una d -colorazione dei lati di Γ . Supponiamo quindi che $c_1 \neq c_2$, e quindi che x_1 sia estremo di un lato (ed uno solo) colorato con c_2 . A partire da tale lato consideriamo un cammino massimale \mathcal{C} in $\Gamma - e$ i cui lati sono alternativamente colorati in c_2 e c_1 . Allora \mathcal{C} è necessariamente semplice:

infatti se uno stesso vertice comparisse due volte in \mathcal{C} , tale vertice non può essere x_1 (dato che nessun lato di colore c_1 è ad esso adiacente), né può essere un altro vertice perché in tal caso vi sarebbero almeno tre lati di \mathcal{C} adiacenti ad esso, contro il fatto che i lati di \mathcal{C} sono di due soli colori. Inoltre, \mathcal{C} non può contenere il vertice x_2 , perché se così fosse x_2 sarebbe estremo di un lato colorato con c_1 ; dunque \mathcal{C} avrebbe lunghezza pari, ed aggiungendo ad esso il lato e si otterrebbe un ciclo di lunghezza dispari in Γ , il che non è possibile essendo Γ bipartito. Ora ricoloriamo i lati di \mathcal{C} , scambiando i due colori c_1 e c_2 ; per la scelta di c_2 e la massimalità di \mathcal{C} , ciò fornisce ancora una d -colorazione dei lati di $\Gamma - e$. Assegnando allora al lato e il colore c_2 si ottiene una d -colorazione dei lati di Γ . ■

Per quanto riguarda limiti superiori al valore di $\chi'(\Gamma)$, osserviamo che ogni lato di un grafo Γ ha un estremo in comune con al più $2\Delta(\Gamma) - 2$ altri lati; applicando il Teorema di Brooks al grafo $L(\Gamma)$ i cui vertici sono i lati di Γ (vedi esercizio 1.35), si ricava $\chi'(\Gamma) \leq 2\Delta(\Gamma) - 2$. Tuttavia, si può dire molto di più: infatti vale il seguente importante risultato, che non dimostriamo.

Teorema 4.4. (Vizing 1964) *Sia Γ un grafo. Allora*

$$\Delta(\Gamma) \leq \chi'(\Gamma) \leq \Delta(\Gamma) + 1.$$

Dunque, ad esempio, ricordando il caso degli incontri bilaterali al congresso intergalattico citato all'inizio del capitolo, possiamo concludere che sicuramente tali incontri potranno tutti aver luogo in un numero di giornate pari a quello del massimo numero di incontri che una singola delegazione intende effettuare più uno. Un risultato non del tutto ovvio.

Torniamo ora alla questione di determinare l'indice cromatico dei grafi completi K_n . Chiaramente $\chi'(K_n) \geq n - 1$. Supponiamo prima che $n = 2k + 1$ sia dispari; in tal caso il numero di lati è $|E| = k \cdot (2k + 1)$. Se fosse $\chi' = \chi'(K_{2k+1}) = 2k$, allora per almeno uno dei colori s , il numero $t(s)$ di lati di colore s deve soddisfare

$$t(s) \geq |E|/\chi' = \frac{k(2k+1)}{2k} = \frac{2k+1}{2};$$

e siccome tale numero è un intero, deve essere $t(s) \geq k + 1$. Ma lati dello stesso colore hanno tutti estremi distinti, e $k+1$ lati hanno $2k+2$ estremi distinti, il che non può essere, perché questo numero supera quello dei vertici di K_{2k+1} . Dunque $\chi' \geq \Delta(K_{2k+1}) + 1 = 2k + 1$. A questo punto il teorema di Vizing assicura che $\chi'(K_{2k+1}) = 2k + 1$; tuttavia diamo una esplicita colorazione che poi ci sarà utile anche nel caso pari. Dunque, prendiamo come insieme S dei colori l'insieme delle classi di resto modulo $n = 2k+1$, che scriviamo come $S = \{[0]_n, [1]_n, \dots, [n-1]_n\}$; quindi etichettiamo i vertici di K_n con gli interi $0, 1, \dots, n-1$, ed assegnamo ad ogni lato $\{i, j\}$ di K_n il colore $\gamma'(\{i, j\}) = [i+j]_n$. Se due lati $\{i, j\}$ ed $\{i, k\}$ con un estremo in comune hanno lo stesso colore, allora $i+j \equiv i+k \pmod{n}$, da cui $j \equiv k \pmod{n}$, da cui segue $j = k$ dato che entrambi sono compresi tra 0 e $n-1$. Dunque quella data è una colorazione dei lati di K_n con n colori. Osserviamo che, per ciascun vertice i , i lati adiacenti ad i assumono tutti i colori di S tranne il colore $[2i]_n$; poiché n è dispari, l'insieme delle classi $[2i]_n$, con $0 \leq i \leq n-1$ è tutto S ; concludiamo dunque che tali colori "mancanti" sono, al variare dei vertici, tutti diversi.

Supponiamo ora che $n = 2k$ sia pari (con $k \geq 2$), e indichiamo con $0, 1, \dots, n - 1$ i suoi vertici. Togliamo da K_n il vertice $n - 1$ e coloriamo i lati del restante grafo completo K_{n-1} con il metodo descritto in precedenza (i colori sono le classi di resto modulo $n - 1$). Quindi ad ogni vertice del tipo $\{i, n - 1\}$ assegnamo il colore $[2i]_{n-1}$. Per quanto osservato sopra, in tal modo si ottiene una colorazione dei lati di K_n , e questa utilizza $n - 1$ colori.

Abbiamo dunque provato il seguente risultato.

Proposizione 4.5. *Sia $k \geq 1$. Allora $\chi'(K_{2k}) = 2k - 1$ e $\chi'(K_{2k+1}) = 2k + 1$.*

Le esplicite colorazioni che abbiamo dato forniscono anche un metodo, nel caso si tratti di rappresentare lo schema di un torneo all'italiana, per stilare un calendario; mediante il quale è inoltre possibile determinare con un semplice calcolo in quale giornata una data partita $\{i, j\}$ dovrà essere disputata. Di metodi del genere ce sono molti altri: uno di questi è suggerito dalla figura seguente (dove si considera il caso di 10 squadre):

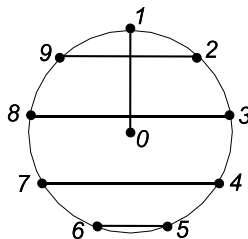


Figura 4.4: un accoppiamento in K_{10} .

Nel diagramma sono indicati gli incontri della prima giornata; quelli della seconda giornata si ottengono tenendo fissi i numeri sui vertici e ruotando il diagramma dei lati di $1/9$ di angolo giro; un'ulteriore rotazione darà gli incontri della terza giornata, e così via.

Esercizio 4.6. Si determini l'indice cromatico dei grafi dei poliedri regolari, quello dei grafi dell'esercizio 3.1, e quello del grafo di Grötzsch.

Esercizio 4.7. Si provi che l'indice cromatico del grafo di Petersen è 4. Si cerchi di trovare un altro grafo cubico con indice cromatico uguale a 4 (ce ne sono).

Esercizio 4.8. Sia Γ un grafo cubico connesso e tale che $\chi'(\Gamma) = 4$. Si provi che Γ non ammette cicli hamiltoniani.

Esercizio 4.9. Sia Γ un grafo regolare connesso con un numero pari di vertici. Supponiamo che Γ si decomponga in k cicli hamiltoniani disgiunti (significa che esistono k cicli hamiltoniani in Γ , tali che ogni lato di Γ appartiene a uno ed un solo di essi). Si provi che $\chi'(\Gamma) = \Delta(\Gamma) = 2k$.

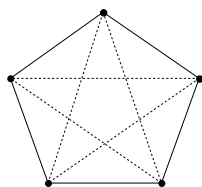
Esercizio 4.10. Si determini, per ogni $n \geq 2$, l'indice cromatico del n -cubo Q_n (vedi esercizio 2.34).

4.3 Teoria di Ramsey.

In questa (e solo in questa) sezione, per comodità e, per così dire, per necessità espressive, useremo il termine "colorazione" di un grafo con un significato diverso da quello attribuitogli nelle sezioni precedenti. Con colorazione dei lati di un grafo $\Gamma = (V, E)$ intenderemo una *qualsiasi* assegnazione di colori, presi da un certo insieme, ai lati di Γ , senza alcuna condizione sui colori dei lati contigui o altro; dunque una qualsiasi applicazione $E \rightarrow S$, dove S è l'insieme dei colori.

Dato un grafo Γ a cui sia stata assegnata una tale colorazione, diremo che un sottografo di Γ è *monocromatico* se, nella colorazione data, i suoi lati hanno tutti lo stesso colore.

La figura di sotto mostra una colorazione di K_5 mediante due colori, escogitata in modo che non vi sia alcun triangolo monocromatico.



È possibile fare lo stesso in K_6 ? La risposta è no. Infatti, supponiamo di aver colorato con due colori b e c i lati di K_6 , e sia v_0 un vertice fissato; poiché v_0 ha grado 5, almeno tre lati incidenti ad esso hanno lo stesso colore; siano $\{v_0, v_1\}$, $\{v_0, v_2\}$ e $\{v_0, v_3\}$ tali lati, e sia b il loro colore. Se uno tra i lati $\{v_i, v_j\}$, $1 \leq i < j \leq 3$, ha colore b allora il triangolo indotto da $\{v_0, v_i, v_j\}$ è monocromatico; se invece tali lati hanno tutti colore c allora è il triangolo indotto da $\{v_1, v_2, v_3\}$ ad essere monocromatico.

Dunque, *ogni colorazione con due colori di un grafo completo con almeno sei vertici contiene un triangolo monocromatico.*

Ora, il triangolo è il primo caso interessante di grafo completo; con un poco più di lavoro si può provare che ogni colorazione con due colori di K_{18} contiene un sottografo monocromatico di tipo K_4 . La lettrice che, a questo punto, abbia sentito l'impulso irrefrenabile di provare a dimostrare quest'ultima affermazione, ci sarà riuscita senz'altro, ma si sarà resa conto che definire come "poco" il lavoro in più richiesto rispetto al caso del triangolo sia piuttosto eufemistico (ma è quel tipo di eufemismo che ci si aspetta da un "professionista"¹²). Nella sua forma più semplice, il Teorema di Ramsey è la generalizzazione all'esistenza, in grafi completi con un numero sufficientemente grande di vertici, di un sottografo monocromo isomorfo a K_n .

Teorema 4.6. (Ramsey 1930) *Per ogni $n \geq 1$, esiste un intero $R(n)$ tale che, data una qualsiasi colorazione dei lati del grafo completo $K_{R(n)}$ mediante due colori, esiste un sottografo completo K_n monocromatico.*

Ricordando la definizione di *grafo complementare* $\bar{\Gamma}$ di un grafo Γ (vedi esercizio 1.10: è il grafo i cui vertici sono gli stessi di Γ e, dati due vertici distinti u e v , $\{u, v\}$ è un lato di $\bar{\Gamma}$ se e soltanto se non è un lato di Γ), il Teorema di Ramsey si può riformulare nella maniera seguente:

Per ogni $n \geq 1$, esiste un intero $R(n)$ tale che se Γ è un grafo con almeno $R(n)$ vertici allora Γ o il suo complementare $\bar{\Gamma}$ contengono un sottografo isomorfo al grafo completo K_n .

¹²O forse è il tipo di eufemismo che un professionista si aspetta che ci si aspetti da lui, o da lei.

Risulta più agevole dimostrare il teorema di Ramsey in una forma leggermente (e, in un certo senso, apparentemente) più generale. Dati $n, m \geq 2$, denotiamo con $R(n, m)$ il più piccolo intero (se esiste) tale che data una qualsiasi colorazione dei lati del grafo completo $K_{R(n,m)}$ mediante due colori b e c , esiste un sottografo b -monocromatico isomorfo a K_n oppure un sottografo c -monocromatico isomorfo a K_m . Il numero $R(n)$ del teorema 4.6 coincide quindi con $R(n, n)$; inoltre, chiaramente, $R(n, m) = R(m, n)$. Proveremo il seguente risultato

Teorema 4.7. *Per ogni $n, m \geq 2$, $R(n, m)$ esiste e valgono le seguenti relazioni:*

- 1) $R(n, 2) = n$ per ogni $n \geq 2$.
- 2) Per ogni $n, m \geq 3$: $R(n, m) \leq R(n-1, m) + R(n, m-1)$.
- 3) Per ogni $n, m \geq 2$: $R(n, m) \leq \binom{n+m-2}{m-1} \leq 2^{n+m-3}$.

DIMOSTRAZIONE. Per comodità chiameremo *blu* il colore b e *rosso* il colore c (*carminio* ci pareva un po' altezzoso), e con "colorazione" di un certo grafo intenderemo una colorazione dei suoi lati in blu e rosso. L'esistenza di $R(n, m)$, per ogni $n, m \geq 2$, discende chiaramente per induzione, una volta dimostrati i punti 1) e 2).

1) Una colorazione di K_n che non sia interamente blu include almeno un lato rosso (cioè un K_2 rosso). Dunque $R(n, 2) = n = R(2, m)$.

2) Siano $n, m \geq 3$. Sia $r = R(n-1, m) + R(n, m-1)$, e sia data una colorazione del grafo K_r . Mostriamo che K_r contiene come sottografo o un K_n blu oppure un K_m rosso. Fissiamo un vertice v ; i lati incidenti a v sono $r-1$, alcuni blu e gli altri rossi. Supponiamo che i lati blu adiacenti a v siano in numero maggiore o uguale a $R(n-1, m)$; allora il grafo K' indotto dagli altri estremi ($\neq v$) di essi è un grafo completo che contiene o un K_{n-1} blu oppure un K_m rosso. Nel secondo caso siamo a posto, altrimenti, aggiungendo al sottografo blu K_{n-1} il vertice v si ottiene un sottografo K_n blu.

Dunque, possiamo assumere che in v siano incidenti meno di $R(n-1, m)$ lati blu. Ne segue che a v sono incidenti almeno $R(n, m-1)$ lati rossi. Il sottografo indotto dagli estremi diversi da v di tali lati rossi, avendo almeno $R(n, m-1)$ vertici, contiene o un K_n blu oppure un K_{m-1} , e ragionando come sopra, in K_r si trova o un sottografo K_n blu o un K_m rosso. Dunque $R(n, m) \leq r$, e il punto 2) è provato¹³.

3) La prima disequaglianza discende, per induzione da 1), da 2) e dalla regola di Pascal. Infatti, per ogni $n, m \geq 2$:

$$\binom{(n-1) + m - 2}{m-1} + \binom{n + (m-1) - 2}{m-2} = \binom{n + m - 2}{m-1}.$$

La seconda disequaglianza si deduce dal fatto che il coefficiente binomiale $\binom{n+m-2}{m-1}$ compare come addendo nello sviluppo alla Newton di $(1+1)^{n+m-2} = 2^{n+m-2}$. ■

I numeri $R(n, m)$ sono detti *numeri di Ramsey* e sono noti solo in pochi casi: $R(3, 3) = 6$, $R(3, 4) = 9$, $R(3, 5) = 14$, $R(3, 6) = 18$, $R(3, 7) = 23$, $R(3, 8) = 28$, $R(3, 9) = 36$, $R(4, 4) = 18$ e $R(4, 5) = 25$.

¹³Si osservi come l'idea di questa dimostrazione sia sostanzialmente la stessa che abbiamo usato per discutere il caso dei triangoli.

Il Teorema di Ramsey può essere generalizzato in varie direzioni. La prima consiste nel consentire un numero maggiore (ma sempre finito) di colori: per ogni $r \geq 2$ ed ogni $n_1, n_2, \dots, n_r \geq 1$, esiste un intero $R = R(n_1, n_2, \dots, n_r)$ tale che per ogni colorazione di K_R mediante r colori c_1, c_2, \dots, c_r , esiste un sottografo c_i -monocromatico isomorfo a K_{n_i} per almeno un $1 \leq i \leq r$.

In un'altra direzione si richiede la presenza, come sottografi monocromatici, di grafi diversi dai grafi completi. Poiché ogni grafo con n vertici è un sottografo di K_n , è chiaro che per ogni coppia di grafi H, U esiste un minimo intero $R(H, U)$ tale che per ogni colorazione del grafo completo $K_{R(H, U)}$ mediante i due colori b e c esiste un sottografo b -monocromatico isomorfo a H oppure un sottografo c -monocromatico isomorfo a U . Il problema riguarda trovare, per H e U appartenenti ad opportune classi di grafi, il valore esatto (o perlomeno delle stime significative) di $R(H, U)$. Il seguente risultato è uno dei pochi in cui si riesce a trovare i valori esatti per infinite coppie di grafi.

Proposizione 4.8. *Siano $n, t \geq 2$, e sia A_t un albero con t vertici. Allora*

$$R(K_n, A_t) = (n - 1)(t - 1) + 1.$$

DIMOSTRAZIONE. Se $t = 2$, allora $A_2 = K_2$ è composto da un unico lato, e $R(K_n, A_2) = R(n, 2) = n = (n - 1)(2 - 1) + 1$, per il punto 1) del Teorema 4.7. Similmente, si prova che $R(K_2, A_t) = t$.

Ora, proviamo che $R(K_n, A_t) \leq (n - 1)(t - 1) + 1$ procedendo per induzione su $n + k$. Per quanto visto sopra, possiamo assumere $n, t \geq 3$. Sia $s = (n - 1)(t - 1) + 1$, e G il grafo completo K_s i cui lati sono colorati in blu e rosso. Sia A_{t-1} ottenuto da A_t rimuovendo un vertice di grado 1 ed il lato ad esso incidente. Osserviamo che A_{t-1} è ancora un albero, e denotiamo con v l'unico vertice di A_{t-1} che, in A_t , era adiacente al vertice che è stato rimosso. Sia G_0 il sottografo indotto in G da $s - (n - 1) = (n - 1)(t - 2) + 1$ vertici fissati. Per ipotesi induttiva, G_0 contiene un sottografo blu di tipo K_n , oppure un sottografo rosso B isomorfo ad A_{t-1} . Nel primo caso siamo a posto. Nel secondo caso sia v' il vertice di B che, nell'isomorfismo, corrisponde al vertice v di A_{t-1} . Se esiste un lato rosso incidente a v' il cui secondo estremo non è uno dei vertici di B , allora il sottografo ottenuto aggiungendo a B tale lato è rosso ed è chiaramente isomorfo ad A_t . Possiamo quindi supporre che tutti i lati che congiungono v' ai vertici di G che non stanno in B sono blu. Il numero di tali lati è $s - (t - 1) = (n - 2)(t - 1) + 1$, e quindi, per ipotesi induttiva, il sottografo indotto dagli estremi diversi da v' contiene un K_{n-1} blu o un A_t rosso. Nel secondo caso siamo a posto; nel primo caso congiungendo i vertici di C a v' si ottiene un sottografo blu isomorfo a K_n . Dunque $R(K_n, A_t) \leq s$.

Proviamo ora la disuguaglianza opposta. Dati $n, t \geq 2$, sia Γ l'unione disgiunta di $t - 1$ grafi completi K_{n-1} . Allora Γ ha $r = (n - 1)(t - 1)$ vertici. Completiamo Γ ad un grafo completo K_r , in cui coloriamo di blu i lati appartenenti a Γ ed in rosso quelli del suo complementare, che non è altro che il grafo completo $(t - 1)$ -partito $K_{n-1, n-1, \dots, n-1}$. Si vede subito che, rispetto a tale colorazione, K_r non contiene alcun sottografo blu isomorfo a K_n , né alcun albero rosso con t vertici. Dunque $(n - 1)(t - 1) < R(K_n, A_t)$, e questo completa la dimostrazione. ■

Il teorema, o i teoremi, di Ramsey assumono un aspetto particolarmente suggestivo quando sono espressi con il linguaggio dei grafi; tuttavia la teoria di Ramsey non è una teoria idiomatica di tale linguaggio, ed ha numerose interpretazioni e importanti applicazioni in diversi ambiti della matematica: dalla logica, alla teoria degli insiemi, alla probabilità, etc.

Vediamone una formulazione più vicina a quella originaria, e più generale. Cominciamo con l'osservare che assegnare una colorazione (così come intesa in questo capitolo) ai lati di un grafo completo mediante un numero finito r di colori, significa considerare

una partizione in r classi dell'insieme dei sottoinsiemi di ordine 2 (i lati) di un insieme V (l'insieme dei vertici). Il teorema di Ramsey afferma che, per ogni $n, r \geq 2$, se $|V|$ è sufficientemente grande esiste un suo sottoinsieme X di ordine n tale che tutti i sottoinsiemi di ordine 2 di X appartengono alla stessa classe della partizione.

È possibile estendere questo nel modo seguente. Se V è un insieme (non necessariamente finito) e $k \geq 1$, denotiamo con $[V]^k$ l'insieme di tutti i sottoinsiemi di ordine k di V . Se $c \geq 1$ è un intero, chiamiamo c -colorazione di $[V]^k$ una partizione di $[V]^k$ in c classi di equivalenza, e diciamo che un sottoinsieme X di V è monocromatico se $[X]^k$ è contenuto in una sola classe di equivalenza.

Teorema 4.9. *Siano $k, c, n \geq 1$ interi. Esiste un intero $r = r^k(c, n)$ tale che per ogni insieme V con $|V| \geq r$, ed ogni c -colorazione di $[V]^k$, esiste un sottoinsieme monocromatico di ordine n .*

Omettiamo la dimostrazione; proviamo invece una versione infinita, che ha molte interessanti applicazioni.

Teorema 4.10. *Siano $k, c \geq 1$ interi, e V un insieme infinito. Data una qualsiasi c -colorazione di $[V]^k$ esiste un sottoinsieme infinito monocromatico di V .*

DIMOSTRAZIONE. Procediamo per induzione su k , tenendo fissato c . Se $k = 1$ l'affermazione è ovvia.

Sia dunque $k \geq 2$, e sia $[V]^k$ colorato mediante c colori. Costruiamo induttivamente una sequenza infinita V_0, V_1, V_2, \dots di sottoinsiemi infiniti di V , ed una di elementi x_0, x_1, x_2, \dots tali che, per ogni i :

$$(1) \quad x_i \in V_i, \text{ e } V_{i+1} \subseteq V_i \setminus \{x_i\};$$

(2) i sottoinsiemi (con k elementi) $\{x_i\} \cup Y$, al variare di $Y \in [V_{i+1}]^{k-1}$, hanno tutti lo stesso colore $c(i)$.

Iniziamo col porre $V_0 = V$ e x_0 un qualsiasi elemento di V . Supponiamo di aver costruito V_0, V_1, \dots, V_i , e fissato x_0, x_1, \dots, x_i . Coloriamo ciascun $Y \in [V_i \setminus \{x_i\}]^{k-1}$ assegnandogli il colore del k -insieme $\{x_i\} \cup Y$ nella colorazione data in partenza. In questo modo otteniamo una c -colorazione di $[V_i \setminus \{x_i\}]^{k-1}$. Poiché $V_i \setminus \{x_i\}$ è infinito, l'ipotesi induttiva assicura che esiste un sottoinsieme monocromatico infinito V_{i+1} . Come x_{i+1} prendiamo un qualsiasi elemento di V_{i+1} . Le successioni costruite in questo modo soddisfano chiaramente (1) e (2).

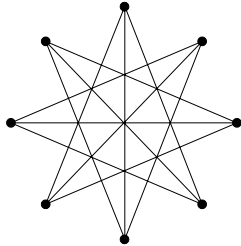
Ora, poiché c è finito, esiste un sottoinsieme infinito A di \mathbb{N} tale che il colore $c(i)$ è lo stesso per ogni $i \in A$. Ponendo $X = \{x_i \mid i \in A\}$ si ottiene un sottoinsieme infinito e monocromatico di V . ■

Ristretto al caso dei grafi (cioè $k = 2$), il Teorema 4.10 si può enunciare nel modo seguente. *Sia Γ un grafo su un insieme infinito di vertici V , e tale che per ogni sottoinsieme infinito X di V esiste almeno un lato di Γ i cui estremi appartengono a X ; allora Γ contiene un sottografo completo infinito.*

Esercizio 4.11. Si provi che se il lati di K_7 sono colorati mediante due colori allora esistono almeno quattro triangoli in K_7 i cui lati hanno tutti lo stesso colore.

Esercizio 4.12. Si provi che data una qualsiasi colorazione con due colori dei lati del grafo completo bipartito $K_{5,5}$ esiste un sottografo monocromatico isomorfo a $K_{3,3}$.

Esercizio 4.13. Aiutandosi anche con il grafo in figura, si provi che $R(3, 4) = 9$.



Esercizio 4.14. Sia C_4 il ciclo di lunghezza 4; si provi che $R(C_4, C_4) = 6$. Si provi quindi che $R(C_5, C_4) = 7$. Si provi che, se n è dispari, allora $R(C_n, C_n) > 2n - 2$.

Esercizio 4.15. Dato $n \geq 1$, sia $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$. Definiamo un grafo Γ_n il cui insieme dei vertici è l'insieme $[I_n]^2$ di tutti i sottoinsiemi di ordine 2 di I_n , e una coppia $\{\{a, b\}, \{c, d\}\}$ di essi è un lato se e solo se $a < b = c < d$. Si provi che Γ_n è privo di triangoli. Quindi, utilizzando il Teorema 4.9 – in particolare $r^2(c, 3)$ – provare che, per ogni $c \geq 1$, se n è sufficientemente grande allora il numero cromatico $\chi(\Gamma_n)$ è maggiore di c .

Digressione: qualche applicazione. 1) Vediamone una quasi immediata. Sia V un insieme di punti sul piano, e data ogni terna di elementi di V , la coloriamo in rosso se è costituita da punti allineati, ed in blu altrimenti. Il teorema di Ramsey 4.9 ci dice che, fissati interi positivi n ed m , se il numero di punti di V è sufficientemente grande, allora in V esistono m punti a tre a tre non allineati, oppure n punti su una stessa retta (infatti si vede facilmente che se ogni terna di un insieme di punti è allineata, allora tutti i punti dell'insieme giacciono su di una stessa retta). La versione infinita (Teorema 4.10) assicura che, se V è infinito, allora esiste un sottoinsieme infinito X di V tale che X è contenuto in una retta oppure nessuna terna di elementi di X è costituita da elementi allineati.

2) Vediamo ora un'applicazione nello stesso ambito, ma meno banale. Ricordiamo che dato un insieme X di punti nel piano, l'*inviluppo convesso* di X è il minimo sottoinsieme convesso del piano che contiene X (che si prova esistere; ricordo anche che un sottoinsieme C del piano è convesso se per ogni coppia di punti di C il segmento che li congiunge è contenuto in C). Diciamo che un insieme finito X di punti del piano forma un *poligono convesso* se nessun punto di X appartiene all'inviluppo convesso degli altri. Si provino le seguenti facili affermazioni:

i) Dati cinque punti del piano, a tre a tre non allineati, ce ne sono quattro di essi che formano un poligono convesso;

ii) un insieme finito di punti nel piano forma un poligono convesso se e solo se ogni suo sottoinsieme di quattro punti forma un quadrilatero convesso.

Ora, dato un insieme finito X di punti del piano, consideriamo la seguente 2-colorazione delle quadruple di elementi di X : in rosso quelle che formano un quadrilatero convesso, in blu tutte le altre. Il punto i) dice che X non contiene sottoinsiemi blu-monocromatici con cinque elementi. Quindi il Teorema 4.9 assicura che, per ogni $n \geq 2$, se il numero di elementi di X supera un certo valore, allora X contiene un sottoinsieme monocromatico rosso di ordine n , ed il punto ii) consente di concludere che tale insieme forma un n -agono convesso. Abbiamo cioè provato il seguente risultato, dovuto a Erdős e Szekers.

Teorema 4.11. *Esiste una funzione $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, tale che ogni insieme del piano costituito da $f(n)$ punti a tre a tre non allineati contiene un sottoinsieme di n punti che forma un poligono convesso.*

Osserviamo che, in congiunzione con l'osservazione 1) di sopra, possiamo concludere che esiste una funzione $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tale che ogni insieme del piano costituito da $g(n)$ punti contiene un sottoinsieme di n punti che forma un poligono convesso, oppure un sottoinsieme di n punti che giacciono su una stessa retta.

3) L'ultimo esempio che diamo riguarda l'analisi reale, e si tratta di un risultato semplice e molto probabilmente già noto, la cui dimostrazione mediante il teorema di Ramsey è quasi immediata.

Teorema 4.12. *Ogni successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a valori reali ammette una sottosuccessione costante o strettamente monotona (crescente o decrescente).*

Per provarlo, basta assegnare ad ogni coppia di numeri naturali i e j , con $i < j$, un diverso colore a seconda che $a_j - a_i$ sia strettamente positivo, zero, o strettamente negativo. Il Teorema 4.10 assicura che esiste un sottoinsieme infinito X di \mathbb{N} tale che ogni coppia di elementi di X ha lo stesso colore. I termini della successione corrispondenti agli elementi di X formano una sottosuccessione che (a seconda del colore) è strettamente crescente, costante, o strettamente decrescente.

ULTERIORI ESERCIZI

Esercizio 4.16. Si provi che non esiste una mappa con cinque regioni a due a due confinanti (questo è il problema posto nel 1840 da Móbius, al quale è a volte erroneamente attribuita la congettura dei quattro colori).

Esercizio 4.17. Si devono assegnare le frequenze ad otto radio locali R_1, \dots, R_8 , con il vincolo che stazioni la cui distanza è inferiore a 100 km devono trasmettere su frequenze differenti. Qual è il minimo numero di frequenze da impiegare se le reciproche distanze tra le emittenti sono quelle descritte dalla tabella seguente?

R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7	R_8	
0	233	114	62	55	70	64	144	R_1
	0	91	251	152	62	47	60	R_2
		0	65	64	166	121	77	R_3
			0	38	188	135	149	R_4
				0	63	109	85	R_5
					0	65	131	R_6
						0	71	R_7
							0	R_8

Esercizio 4.18. Si assegni un ordine ai vertici del grafo del cubo in modo che l'applicazione dell'algoritmo di tipo greedy descritto nella sezione 5.1, a partire da tale ordinamento, termini con il richiedere 4 colori (mentre, essendo il grafo del cubo bipartito, ne sono sufficienti due).

Esercizio 4.19. Fissato $n \geq 2$, qual è il massimo numero di lati di un grafo con n vertici e numero cromatico 4?

Esercizio 4.20. Un grafo Γ si dice *critico* se per ogni suo sottografo proprio H (cioè H è sottografo di Γ e $H \neq \Gamma$) si ha $\chi(H) < \chi(\Gamma)$.

i) Si provi che il grafo W_5 della Figura 4.2 è critico.

ii) Si provi che se Γ è un grafo critico, allora per ogni suo vertice v si ha $d_\Gamma(v) \geq \chi(\Gamma) - 1$.

Esercizio 4.21. Siano $k \geq 2$, $n \geq 2k + 1$, e $K = K(n, k)$ il grafo di Kneser definito nell'esercizio 1.28. Si provi che $\chi(K) \leq n - 2k + 1$. [sugg. interpretando i vertici di K come i sottoinsiemi di cardinalità k dell'insieme $\{1, 2, \dots, n\}$, si assegni un primo colore ai vertici che contengono 1, un secondo colore a quelli che contengono 2 ma non 1 ...]

Esercizio 4.22. Si provi che il grafo di Kneser $K(6, 2)$ ha numero cromatico 4.

Esercizio 4.23. Sia Γ un grafo tale che $\chi(\Gamma - v_1 - v_2) = \chi(\Gamma) - 2$, per ogni coppia di vertici distinti v_1 e v_2 di Γ . Si provi che Γ è un grafo completo.

Esercizio 4.24. Dato un grafo Γ , definiamo con $\chi_2(\Gamma)$ il minimo numero di colori con cui è possibile colorare i vertici di Γ in modo che vertici la cui distanza è minore o uguale a due abbiano colori diversi. Si determini, per ogni $n \geq 1$, $\chi_2(C_{2n})$ e $\chi_2(C_{2n+1})$.

Esercizio 4.25. Si determini $\chi_2(\Gamma)$ nei casi del grafo del cubo e del grafo di Petersen.

Esercizio 4.26. Sia $n \geq 1$ e sia Γ il grafo i cui vertici sono tutti i sottoinsiemi di $\{1, 2, \dots, n\}$ e, dati due di essi X e Y , $\{X, Y\}$ è un lato di Γ se e solo se $X \subseteq Y$, e $|Y \setminus X| = 1$. Si determini $\chi(\Gamma)$ e $\chi'(\Gamma)$.

Esercizio 4.27. Senza fare uso della Proposizione 4.3 si provi che ogni grafo bipartito regolare d -valente ammette una colorazione dei lati con d colori.

Esercizio 4.28. Sia $n \geq 1$. Un *quadrato latino* di ordine n è una matrice $n \times n$ tale che in ogni sua riga e in ogni sua colonna compare una e una sola volta ogni elemento dell'insieme $\{1, 2, \dots, n\}$. Si descriva un metodo per ricavare un quadrato latino da ogni n -colorazione dei lati del grafo completo bipartito $K_{n,n}$.

Esercizio 4.29. Si provi che $R(3, 5) \leq 14$.

Esercizio 4.30. Sia Γ il grafo il cui insieme dei vertici è $\mathbb{Z}/17\mathbb{Z}$ (l'insieme delle classi di resto modulo 17), e una coppia $\{[n], [m]\}$ di classi è un lato se e solo se

$$n - m \equiv \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8 \pmod{17}.$$

Si provi che né Γ né il suo complementare contengono un sottografo isomorfo a K_4 .

Esercizio 4.31. Usando l'esercizio precedente e l'esercizio 4.13 si provi che $R(4, 4) = 18$.

Esercizio 4.32. Sia G un gruppo infinito, tale che per ogni sottoinsieme infinito di G esistono due elementi distinti $x, y \in X$ tali che $xy = yx$. Si provi che G contiene un sottogruppo commutativo infinito.

Esercizio 4.33. (Schur) Provare che per $n \geq 2$, esiste un intero $f(n)$, tale che per ogni partizione di $V = \{1, 2, \dots, f(n)\}$ in n classi, esistono due interi a e b tali che a , b e $a + b$ appartengono alla stessa classe. [sugg.: se $\{1, 2, \dots, N\}$ è ripartito in un insieme S di classi, si colorino i sottoinsiemi con 2 elementi di $\{1, 2, \dots, N\}$, assumendo l'insieme S come insieme dei colori, ed assegnando ad ogni $\{a, b\}$ il colore corrispondente alla classe a cui appartiene $|a - b|$. Se N è abbastanza grande ...]

ESERCIZI OLOSACCHIANI

Esercizio 4.34. Dato un grafo Γ , definiamo con $\chi_{ol}(\Gamma)$ il minimo numero di colori con cui è possibile colorare i vertici di Γ in modo che non vi siano triangoli in Γ i cui vertici hanno lo stesso colore.

- i) Per $n \geq 3$, si determini $\chi_{ol}(K_n)$.
- ii) Si provi che per ogni grafo Γ si ha: $2\chi_{ol}(\Gamma) \leq \chi(\Gamma) + 1$.

Esercizio 4.35. Ricordo che abbiamo chiamato *olografo* una coppia $\Delta = (V, T)$, dove V è un insieme di vertici e T un insieme di terne di elementi di V (dette *triadi*). Due triadi sono adiacenti se hanno almeno un vertice in comune; una *colorazione delle triadi* è una colorazione di T tale che triadi adiacenti hanno colori diversi. Il grado di un vertice v di un olografo Δ è ovviamente definito come il numero di triadi che contengono v ; e denotiamo con $\nabla(\Delta)$ il massimo tra i gradi dei vertici di Δ . Si provi che il Teorema di Vizing (teorema 4.4) non vale per gli olografi.

Esercizio 4.36. Su Olosac (il pianeta dei tre sessi) a tennis - o meglio a "sinnet" - si gioca in tre, su un campo come quello raffigurato dalla figura (si osservi che, contrariamente a quanto accade sulla terra, l'addetto alla manutenzione di un campo di sinnet può ripassare il gesso sulle linee senza interrompersi mai, a meno che non debba tracciare linee anche sotto le reti).

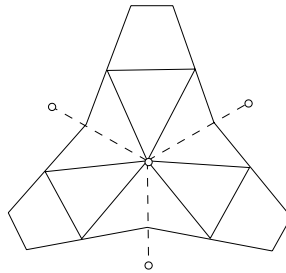


Figura 4.5: un campo di sinnet.

Un torneo viene organizzato tra 12 giocatori, in cui si giocano 4 partite al giorno. Volendo fare in modo che nessuna coppia di giocatori si trovi a partecipare a più di un incontro, quanti giorni al massimo dura il torneo?

Esercizio 4.37. Usando il fatto che $R(3, 4) = 9$ (esercizio 4.13), si provi che $r^3(2, 4) \leq 19$, dove $r^k(c, n)$ è definito col Teorema 4.9.

5 Grafi con direzione, reti, connettività

Sino a questo punto abbiamo considerato quasi esclusivamente grafi semplici: ovvero quelli in cui i lati sono definiti come insiemi di due vertici distinti, e non come coppie ordinate. Se si vuole, un grafo semplice è una relazione binaria *simmetrica* sull'insieme dei vertici (e tale che nessun vertice è in relazione con se stesso). Intendendo invece rappresentare una relazione binaria non necessariamente simmetrica, lo strumento è quello dei *grafi con direzione*: ovvero grafi in cui i lati (che in questo caso chiameremo archi) sono coppie ordinate di vertici. Nel senso naturale, ogni arco ha dunque un vertice *iniziale* ed un vertice *finale*, ed è quindi più propriamente rappresentato mediante una freccia.

La prima sezione di questo capitolo è una breve esposizione della terminologia di base per i grafi con direzione. Potremo essere relativamente spicci dato che si tratta per lo più di naturali estensioni di analoghi concetti già discussi per i grafi semplici.

Nella seconda sezione introdurremo invece il concetto nuovo di *flusso* in un grafo diretto e dimostreremo il teorema fondamentale che lo riguarda (Teorema Maxflow–Minicut).

Nella terza e quarta sezione ritorneremo allo studio dei grafi semplici, trattando in forma più generale questioni relative all'esistenza di "molti" cammini nei grafi e discutendo l'estensione a grafi qualsiasi del concetto di accoppiamento. Tali argomenti sono inseriti a questo punto perché, in particolare nella terza sezione, per dimostrare alcuni risultati classici e fondamentali (come il Teorema di Menger) in questo ambito, utilizzeremo proprio i teoremi sul flusso in un grafo diretto provati nella seconda sezione.

5.1 Grafi con direzione.

Sia V un insieme non vuoto, denotiamo con $D(V) = \{(v, w) \mid v, w \in V, v \neq w\}$ l'insieme di tutte le coppie *ordinate* di elementi distinti di V .

Un **grafo con direzione** (detto anche **di-grafo**) (in inglese: *directed graph* o *digraph*) è una coppia $\Gamma = (V, A)$, dove V (l'insieme dei vertici) è un insieme non vuoto, ed A è un sottoinsieme (che può anche essere vuoto) dell'insieme $D(V)$; gli elementi di A sono detti gli **archi** del grafo con direzione Γ .

Se $a = (v, w)$ è un arco, chiameremo v il vertice *iniziale* di a e w il vertice *finale* w . Un diagramma di un grafo con direzione è simile a quello di un grafo semplice, ma ciascun arco viene disegnato con una freccia che punta dal suo vertice iniziale verso il suo vertice finale.

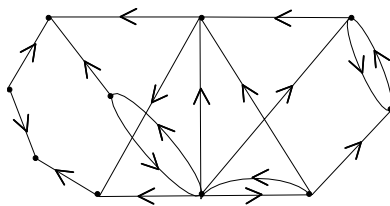


Figura 5.1: un grafo con direzione.

Con la dovuta attenzione, ma senza grosse difficoltà, la maggior parte delle definizioni di base date per i grafi si possono estendere ai grafi con direzione. In particolare, per quanto riguarda il grado, se v è un vertice di un grafo con direzione $\Gamma = (V, A)$ distingueremo tra grado *in entrata* $d^e(v)$ di v , che è il numero di archi distinti di cui v è il vertice finale, e grado *in uscita* $d^u(v)$, che è il numero di archi distinti di cui v è il vertice iniziale.

Formalmente

$$d^e(v) = |\{(w, v) : w \in V, (w, v) \in A\}|$$

$$d^u(v) = |\{(v, w) : w \in V, (v, w) \in A\}|$$

Poiché ogni arco ha un solo vertice iniziale ed un solo vertice finale, il corrispondente per grafi con direzione del Teorema 1.1 è ancora più facile da provare

Proposizione 5.1. *Sia $\Gamma = (V, A)$ un grafo con direzione. Allora*

$$\sum_{v \in V} d^e(v) = |A| = \sum_{v \in V} d^u(v).$$

Un grafo con direzione è *regolare* se il grado in entrata e quello in uscita sono gli stessi per tutti i vertici (chiaramente, se il grafo - come in genere continueremo ad assumere - è finito allora i due gradi sono anche uguali tra loro).

Un grafo con direzione sull'insieme dei vertici V si dice *completo* se l'insieme degli archi coincide con $D(V)$. Il numero di archi di un grafo con direzione completo su n vertici è quindi $n(n-1)$. Un *sottografo* di un grafo con direzione (V, A) è un grafo con direzione (U, B) tale che $\emptyset \neq U \subseteq V$ e $B \subseteq A$. Il concetto di sottografo *indotto* per grafi con direzione è analogo a quello per i grafi semplici.

Un *isomorfismo* tra grafi con direzione (V, A) e (V', A') è una biezione $\phi : V \rightarrow V'$ tale che, per ogni $u, v \in V$, $(u, w) \in A \Leftrightarrow (\phi(u), \phi(v)) \in A'$.

Ad esempio, i grafi con direzione in figura non sono isomorfi:

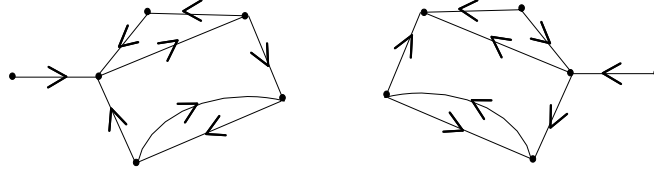


Figura 5.2: grafi con direzione non isomorfi.

Siano u e v vertici di un grafo con direzione Γ , un **cammino con direzione** da u a v è una successione

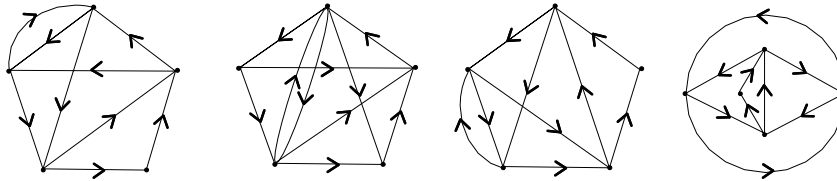
$$v_0 (v_0, v_1) v_1 (v_1, v_2) \dots v_{n-2} (v_{n-2}, v_{n-1}) v_{n-1} (v_{n-1}, v_n) v_n$$

di vertici ed archi di Γ in cui $v_0 = u$, $v_n = v$, gli archi sono tutti distinti ed ognuno ha come vertice finale il vertice iniziale dell'arco successivo. Il numero naturale n è la *lunghezza* del cammino con direzione, e se $u = v$ si parla di *circuito con direzione*.

Un grafo con direzione Γ è **connesso** se è connesso (nel senso indiretto) il multigrafo (detto multigrafo indotto) che si ottiene "togliendo le frecce" dagli archi di Γ ; mentre Γ si dice **fortemente connesso** se per ogni coppia di vertici distinti u e v di Γ esiste un cammino con direzione in Γ da u a v .

Esercizio 5.1. Si faccia un esempio di grafo con direzione connesso ma non fortemente connesso. Per ogni $n \geq 1$ si faccia un esempio di grafo con direzione con n vertici che non sia fortemente connesso, ma il cui multigrafo indotto abbia un circuito semplice di lunghezza n .

Esercizio 5.2. Si dica quanti sono, a meno di isomorfismo, i grafi con direzione con tre vertici, e quanti quelli con quattro vertici. Si dica quali tra i seguenti grafi con direzione sono tra loro isomorfi.



Esercizio 5.3. Si dimostri che in un grafo con direzione fortemente connesso il numero degli archi è maggiore o uguale al numero dei vertici. Si dica quali sono (a meno di isomorfismo) i grafi con direzione fortemente connessi in cui il numero degli archi è uguale a quello dei vertici.

Esercizio 5.4. Un circuito euleriano con direzione in un grafo con direzione Γ è un circuito con direzione che passa per ogni arco di Γ . Si provi che un grafo con direzione Γ privo di vertici isolati ha un circuito euleriano con direzione se e soltanto se è connesso e $d^e(v) = d^i(v)$ per ogni vertice v di Γ .

Esercizio 5.5. Un grafo *orientato* è un grafo con direzione in cui per ogni coppia di vertici c'è al più un arco che li connette; detto formalmente, è un grafo con direzione (V, A) tale che, per ogni $u, v \in V$, $(u, v) \in A \Rightarrow (v, u) \notin A$ (in altri termini ancora, un grafo orientato è un grafo semplice in cui ad ogni lato è assegnata una direzione). Si provi che in un grafo orientato completo (cioè ogni coppia di vertici è connessa da uno e un solo arco) esiste un cammino hamiltoniano con direzione (attenzione: non necessariamente un circuito).

5.2 Reti e flussi.

L'idea di rete nasce (fin dai lavori di Kirchoff del 1845 sulle reti elettriche¹⁴) da una suggestione di carattere assolutamente pratico: quella di introdurre un modello matematico essenziale per trattare sistemi di trasporto realizzati mediante tratti di condutture ed un certo numero di giunzioni nelle quali due o più condutture confluiscono. Ogni singolo tratto di conduttura ha un predeterminato verso ed una capacità massima; infine, "qualcosa" scorre nella rete.

L'aspetto sorprendente della teoria sviluppatasi è che tecniche nate per descrivere situazioni eminentemente pratiche abbiano suggerito uno strumento molto versatile e potente per lo studio astratto dei grafi (con direzione o no) e non soltanto, come cercheremo di mostrare nella sezione successiva (finora abbiamo suggerito applicazioni "pratiche" di strumenti nati dalla teoria: nelle prossime pagine, in un certo senso, avverrà qualcosa di contrario).

Se $R = (V, A)$ è un grafo con direzione, e $v \in V$ è un vertice di R , denotiamo con $E(v)$ ed $U(v)$, rispettivamente, l'insieme degli archi di R il cui vertice finale è v , e quello degli archi dei quali v è il vertice iniziale.

Una **rete** è un grafo con direzione $R = (V, A, s, t)$, in cui sono evidenziati due vertici **s** e **t** detti, rispettivamente, la *sorgente* ed il *termine*, e in cui gli archi sono pesati: ovvero è data una funzione $\mathbf{c} : A \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, che ad ogni arco e associa un numero reale positivo $\mathbf{c}(e)$ detta *capacità* di e .

¹⁴Ci crediate o no, Gustav R. Kirchoff era nato a Königsberg.

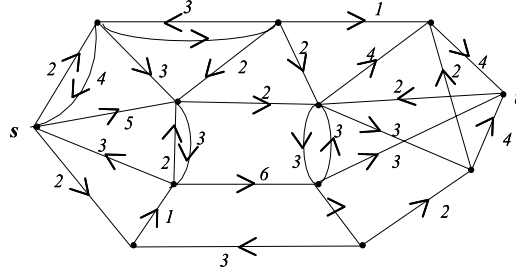


Figura 5.3: una rete.

Un **flusso** (in inglese *flow*) per la rete $R = (V, A, s, t)$ è un'applicazione $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ che soddisfa alle condizioni

- i) $0 \leq f(e) \leq c(e)$, per ogni arco $e \in A$
- ii) $\sum_{e \in E(v)} f(e) = \sum_{e \in U(v)} f(e)$, per ogni vertice $v \in V$, $v \neq s, t$.

Il **valore** del flusso f è definito come

$$v(f) = \sum_{e \in U(s)} f(e) - \sum_{e \in E(s)} f(e).$$

Il valore può essere inteso come la misura della quantità di flusso netta che scaturisce (o vi è immessa dall'esterno) alla sorgente. È naturale pensare che questo valore debba coincidere con quello del flusso netto che arriva (o esce) dal termine della rete. Così è infatti. Per convincercene, osserviamo innanzi tutto che, poiché ogni arco e ha un solo vertice iniziale ed un solo vertice finale si ha

$$\sum_{v \in V} \left(\sum_{e \in E(v)} f(e) - \sum_{e \in U(v)} f(e) \right) = \sum_{v \in V} \sum_{e \in E(v)} f(e) - \sum_{v \in V} \sum_{e \in U(v)} f(e) = 0.$$

Quindi, per la proprietà (ii) di f :

$$\begin{aligned} \sum_{e \in E(t)} f(e) - \sum_{e \in U(t)} f(e) &= \sum_{e \in E(t)} f(e) - \sum_{e \in U(t)} f(e) + \sum_{v \neq s, t} \left(\sum_{e \in E(v)} f(e) - \sum_{e \in U(v)} f(e) \right) = \\ &= \sum_{v \in V} \left(\sum_{e \in E(v)} f(e) - \sum_{e \in U(v)} f(e) \right) + v(f) = v(f) \end{aligned}$$

È conveniente generalizzare questa osservazione. Sia S un sottoinsieme non vuoto dei vertici di una rete $R = (V, A, s, t)$. Denotiamo con $U(S)$ l'insieme degli archi che "escono" da S , cioè il cui termine iniziale appartiene a S ma non quello finale; similmente con $E(S)$ denotiamo l'insieme degli archi che "entrano" in S . Formalmente:

$$U(S) = \{ (u, v) \in A \mid u \in S, v \notin S \}$$

$$E(S) = \{ (u, v) \in A \mid u \notin S, v \in S \}$$

Lemma 5.2. Sia S un sottoinsieme di vertici della rete $R = (V, A, s, t)$. Se $s \in S$ ma $t \notin S$, allora per ogni flusso f per R si ha

$$\sum_{e \in U(S)} f(e) - \sum_{e \in E(S)} f(e) = v(f).$$

DIMOSTRAZIONE. Per ogni arco e della rete R denotiamo con $i(e)$ e $t(e)$ rispettivamente il vertice iniziale e quello finale di e , ovvero $e = (i(e), t(e))$. Sia ora S un insieme di vertici contenente s ma non t , ed f un flusso per R . Allora, per la proprietà (ii) dei flussi, e siccome $t \notin S$:

$$v(f) = \sum_{e \in U(s)} f(e) - \sum_{e \in E(s)} f(e) = \sum_{v \in S} \left(\sum_{e \in U(v)} f(e) - \sum_{e \in E(v)} f(e) \right);$$

quindi, riscrivendo la somma del membro di destra,

$$v(f) = \sum_{i(e) \in S} f(e) - \sum_{t(e) \in S} f(e).$$

Ora, in ciascuna delle due sommatorie del membro di destra, possiamo considerare solo il contributo degli archi che non hanno entrambi gli estremi in S ; questi ultimi, infatti contribuiscono con un $f(e)$ ad entrambe le somme, e quindi contribuiscono con 0 alla loro differenza. Pertanto

$$v(f) = \sum_{e \in U(S)} f(e) - \sum_{e \in E(S)} f(e)$$

come si voleva. ■

Una **sezione** (in inglese *cut*) della rete R è un insieme C di archi tale che ogni cammino con direzione da s a t attraversa un arco di C .

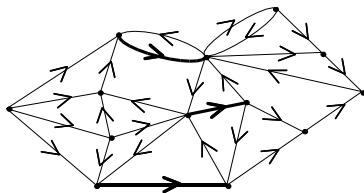


Figura 5.4: un sezione in una rete.

ATTENZIONE: d'ora in avanti assumeremo che nelle reti R che consideriamo esista almeno un cammino con direzione dalla sorgente s al termine t , e quindi che le sezioni di R non possano essere vuote. Da un punto di vista pratico, questa è un'assunzione del tutto scontata, e da quello astratto non è molto limitativa: avremmo potuto facilmente farne a meno, ma questo ci avrebbe costretto ad allungare le dimostrazioni in diversi punti per discutere (in genere in modo banale, ma noioso) il caso di sezioni vuote.

La **capacità** $\mathbf{c}(C)$ della sezione C è la somma delle capacità degli archi che le appartengono:

$$\mathbf{c}(C) = \sum_{e \in C} \mathbf{c}(e).$$

Il problema fondamentale nella teoria dei flussi in una rete è quale sia il valore massimo di un flusso per una data rete R . È piuttosto intuitivo che il valore di un flusso non possa superare quello che una sezione è in grado di sopportare. Con l'aiuto del lemma 5.2, questo fatto si prova abbastanza agevolmente.

Lemma 5.3. *Sia f un flusso per la rete R , e sia C una sezione di R . Allora*

$$v(f) \leq \mathbf{c}(C).$$

DIMOSTRAZIONE. Sia C una sezione della rete R , e sia S l'insieme dei vertici di R che possono essere raggiunti a partire dalla sorgente \mathbf{s} mediante cammini con direzione che non impiegano archi di C . Per definizione di sezione S , non contiene \mathbf{t} (mentre ovviamente contiene \mathbf{s}). Sia $e = (u, w) \in U(S)$ un arco uscente da S ; allora (poiché $u \in S$) esiste un cammino con direzione da \mathbf{s} ad u che non contiene archi di C ; prolungando tale cammino mediante l'arco e si ottiene un cammino con direzione da \mathbf{s} a w , che (poiché $w \notin S$) deve, per definizione dell'insieme S , contenere un arco di C : la sola possibilità è che $e \in C$. Dunque $U(S) \subseteq C$. Sia ora f un flusso per R . Per il Lemma 5.2 e quanto appena osservato (tenendo presente che f è a valori positivi),

$$v(f) = \sum_{e \in U(S)} f(e) - \sum_{e \in E(S)} f(e) \leq \sum_{e \in U(S)} f(e) \leq \sum_{e \in C} f(e) = \mathbf{c}(C)$$

che è ciò che volevamo provare. ■

A questo punto notiamo che, essendo finito il numero di archi in una rete R , è finito anche il numero di sezioni di R , e quindi esiste un valore minimo per la capacità di una sezione. Il lemma precedente asserisce che il valore di un qualunque flusso per R non può oltrepassare questa capacità minima delle sezioni. Il fatto che esistano sempre flussi per R il cui valore raggiunge tale limite teorico (Teorema 5.5), è il risultato fondamentale della teoria dei flussi in una rete, ed è chiamato Teorema *Maxflow-Mincut*. Prima di enunciarlo esplicitamente, proviamo un Lemma che enuclea il punto centrale della sua dimostrazione.

Sia f un flusso per la rete R ; denotiamo con S_f l'insieme dei vertici v di R tali che esiste una sequenza di vertici ed archi $\mathbf{s} = v_0 e_1 v_1 e_2 \dots v_{q-1} e_q v_q = v$ con la proprietà che i vertici sono tutti distinti e, per ogni $1 = 1, \dots, q$, si ha

- $e_i = (v_{i-1}, v_i)$, e $f(e_i) < \mathbf{c}(e)$; oppure
 - $e_i = (v_i, v_{i-1})$, e $f(e_i) > 0$.
- (4)

Lemma 5.4. *Sia f un flusso per la rete R . Se $\mathbf{t} \in S_f$ allora esiste un flusso f' per R tale che $v(f') > v(f)$. Se inoltre la capacità di ogni arco di R è un numero intero ed f è un flusso intero (cioè $f(e) \in \mathbb{N}$ per ogni arco e di R), allora esiste un flusso intero f' con $v(f') > v(f)$.*

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che, dato il flusso f per R , si abbia $\mathbf{t} \in S_f$. Sia allora

$$\mathcal{P}: \quad \mathbf{s} = v_0 e_1 v_1 e_2 \dots v_{q-1} e_q v_q = \mathbf{t}$$

una sequenza di vertici e archi con la proprietà della definizione data sopra.

Denotiamo con \overrightarrow{A} l'insieme degli archi di \mathcal{P} che "vanno nella giusta direzione", ovvero $\overrightarrow{A} = \{e_i \in \mathcal{P} \mid e_i = (v_{i-1}, v_i)\}$; e con $\overleftarrow{A} = \{e_i \in \mathcal{P} \mid e_i = (v_i, v_{i-1})\}$ l'insieme degli archi di \mathcal{P} che "vanno in direzione contraria". Poniamo, per ogni arco e_i di \mathcal{P} ,

$$\delta(e_i) = \begin{cases} \mathbf{c}(e_i) - f(e_i) & \text{se } e_i \in \overrightarrow{A} \\ f(e_i) & \text{se } e_i \in \overleftarrow{A} \end{cases}$$

Per definizione dell'insieme S_f , abbiamo $\delta(e_i) > 0$ per ogni $i = 1, \dots, q$, e dunque $\delta = \min\{\delta(e_i) \mid i = 1, \dots, q\}$ è un numero reale strettamente positivo. Definiamo ora un nuovo flusso f' ponendo, per ogni arco e di R

$$f'(e) = \begin{cases} f(e) & \text{se } e \notin \overrightarrow{A} \cup \overleftarrow{A} \\ f(e) + \delta & \text{se } e \in \overrightarrow{A} \\ f(e) - \delta & \text{se } e \in \overleftarrow{A} \end{cases}$$

La definizione di δ assicura che la funzione f' soddisfa la condizione (i) di un flusso, ed è chiaro che anche la condizione (ii) è soddisfatta da f' . Osserviamo anche che, se le capacità $\mathbf{c}(e)$ ed il flusso $f(e)$ sono numeri interi (per ogni arco e di R), allora δ è un intero positivo maggiore o uguale a 1, e f' è un flusso intero.

Proviamo infine che $v(f') > v(f)$. Se $e_q \in \overrightarrow{A}$, allora $e_q \in E(\mathbf{t})$, e quindi si ha

$$v(f') = \sum_{e \in E(\mathbf{t})} f'(e) - \sum_{e \in U(\mathbf{s})} f'(e) = \sum_{e \in E(\mathbf{t})} f(e) + (f'(e_q) - f(e_q)) - \sum_{e \in U(\mathbf{s})} f(e) = v(f) + \delta.$$

Similmente: se $e_q \in \overleftarrow{A}$, allora $e_q \in U(\mathbf{t})$, e quindi

$$v(f') = \sum_{e \in E(\mathbf{t})} f(e) - \sum_{e \in U(\mathbf{s})} f(e) + (f(e_q) - f'(e_q)) = v(f) + \delta,$$

provando così che $v(f') = v(f) + \delta > v(f)$. ■

Teorema 5.5. (Maxflow–Mincut) *Sia R una rete. Allora il valore massimo di un flusso per R è uguale alla minima capacità delle sezioni di R . Se inoltre le capacità degli archi di R sono espresse da numeri interi, allora il valore massimo è ottenibile mediante un flusso intero.*

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo prima che le capacità degli archi di R siano espresse da numeri interi, ed utilizziamo il Lemma 5.4 come passo di un algoritmo che porta alla determinazione di un flusso f e di una sezione C tali che $v(f) = \mathbf{c}(C)$. È chiaro allora che, per il Lemma 5.3, f e C sono, rispettivamente, un flusso di valore massimo, ed una sezione di capacità minima.

Si parte da un flusso f_0 (è sempre possibile partire dal flusso nullo: ma partendo da un flusso che abbia già un valore apprezzabile, in genere si diminuisce il numero di passi necessari); se l'insieme S_{f_0} contiene il termine \mathbf{t} della rete, allora la dimostrazione del Lemma 5.4 fornisce un metodo effettivo per costruire un flusso intero f_1 , con $v(f_1) \geq v(f) + 1$. Se $\mathbf{t} \in S_{f_1}$, si procede costruendo un flusso intero f_2 , con $v(f_2) \geq v(f_1) + 1$, e così via. Poiché il valore che può assumere un flusso è limitato (dalla capacità di qualsiasi sezione), questo processo si arresta ad un flusso $f_n = f$, tale che $\mathbf{t} \notin S_f$ (eventualmente, se siamo proprio fortunati, $f = f_0$).

Proviamo che $U(S_f)$ è una sezione di R . Sia $\mathbf{s} = v_0 e_1 v_1 e_2 \dots v_{q-1} e_q v_q = \mathbf{t}$ un cammino con direzione da \mathbf{s} a \mathbf{t} . Poiché $\mathbf{t} \notin S_f$, esiste un massimo $i \in \{0, \dots, q-1\}$ tale che $v_i \in S_f$ (eventualmente $i = 0$). Allora $v_{i+1} \notin S_f$ e quindi $e_{i+1} = (v_i, v_{i+1}) \in U(S_f)$. Proviamo ora che la capacità di $U(S_f)$ è uguale al valore di f . Osserviamo innanzi tutto che, poiché $\mathbf{s} \in S_f$ e $\mathbf{t} \notin S_f$, il Lemma 5.2 assicura che

$$v(f) = \sum_{e \in U(S_f)} f(e) - \sum_{e \in E(S_f)} f(e).$$

Sia $e = (v, w) \in U(S_f)$; allora, siccome $v \in S_f$, esiste una sequenza di vertici ed archi da \mathbf{s} a v che soddisfa le proprietà (4); se fosse $f(e) > \mathbf{c}(e)$, allora tale sequenza potrebbe essere prolungata mediante ew , che darebbe la contraddizione $w \in S_f$. Dunque, per ogni $e \in U(S_f)$, $f(e) = \mathbf{c}(e)$. Un argomento analogo mostra che per ogni $e \in E(S_f)$, $f(e) = 0$. Pertanto

$$v(f) = \sum_{e \in U(S_f)} f(e) - \sum_{e \in E(S_f)} f(e) = \sum_{e \in U(S_f)} \mathbf{c}(e) = \mathbf{c}(C),$$

provando così che f è un flusso (intero) di valore massimo.

Nel caso generale, ci basta provare l'esistenza di un flusso il cui valore coincide con la minima capacità di una sezione di R . Sia γ tale minima capacità, che è possibile determinare mediante un numero finito di operazioni. Ora, possiamo approssimare dal basso mediante numeri razionali le capacità di ogni singolo arco di R ; in tal modo, chiaramente, si approssima anche il valore γ mediante un numero razionale γ' ; poiché il numero di archi è finito, moltiplicando le capacità degli archi per il loro minimo denominatore comune d otteniamo una rete a capacità intere e capacità minima di una sezione uguale a $d\gamma'$; per il caso precedente esiste un flusso intero per tale rete il cui valore è $d\gamma'$; dividendo tutti i valori di questo flusso per d , si ottiene un flusso per la rete approssimante il cui valore è γ' . A questo punto, un'applicazione dell'analisi assicura che esiste un flusso f per R il cui valore è γ (se non avete ancor studiato la convergenza in uno spazio compatto, potete prendere questo per buono). Infatti, se e_1, e_2, \dots, e_q sono gli archi della rete, ed f è un flusso, allora la q -upla $(f(e_1), \dots, f(e_q))$ è un elemento dello spazio \mathbb{R}^q contenuto nel sottoinsieme compatto $[0, \mathbf{c}(e_1)] \times \dots \times [0, \mathbf{c}(e_q)]$. La procedura di approssimare γ mediante il valore di reti a razionali produce un insieme di punti in tale spazio che, per il Teorema di Bolzano-Wierstrass, contiene una sottosuccessione convergente. ■

È possibile che, in alcune situazioni, si debba trattare grafi in cui vi è una limitazione alla capacità dei vertici piuttosto che a quella degli archi. Non è troppo difficile derivare dal teorema precedente un analogo risultato per questo caso; l'idea è quella di trattare ogni vertice del grafo come un arco in una opportuna rete. Quindi, supponiamo di avere dato un grafo diretto $R = (V, A)$, con due vertici evidenziati s e t , ed una funzione di capacità $\mathbf{c} : V \setminus \{s, t\} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$. In tal caso, un *flusso* è una funzione f definita sugli archi di R che soddisfi alla condizione

$$\sum_{e \in E(x)} f(e) = \sum_{e \in U(x)} f(e) \leq \mathbf{c}(x)$$

per ogni $x \in V \setminus \{s, t\}$ (ovvero, il flusso che "attraversa" ciascun vertice non può superare la capacità del vertice stesso). Il corrispettivo di sezione è un sottoinsieme $S \subseteq V \setminus \{s, t\}$ di vertici tale che ogni cammino diretto da s a t passa per almeno un vertice di S ; diremo allora che S separa s da t .

Teorema 5.6. Sia $R = (V, A, s, t)$ un grafo diretto con una funzione di capacità sui vertici. Allora, il massimo valore di un flusso per R è uguale alla capacità minima di un insieme di vertici che separa s da t .

DIMOSTRAZIONE. Ad R associamo una rete nel modo seguente. Sdoppiamo ciascun vertice $x \in V \setminus \{s, t\}$ in due vertici x^- e x^+ , ed introduciamo un nuovo arco (x^-, x^+) . I vertici della rete R' sono dunque s, t e tutti quelli del tipo x^- e x^+ . Se $x, y \in V$ e (x, y) è un arco di R , allora (x^+, y^-) è un arco di R' (dove s'intende $s^+ = s^- = s$ e $t^+ = t^- = t$); gli archi di R' sono tutti questi più tutti quelli del tipo (x^-, x^+) con $x \in V \setminus \{s, t\}$ (dunque ogni vertice $s \neq x \neq t$ di R è stato rimpiazzato da un arco (x^-, x^+) , dove al vertice x^- "arrivano" tutti gli archi che arrivavano in x e dal vertice x^+ "partono" tutti gli archi che partivano da x). Sugli archi di R' definiamo una capacità c' ponendo

$$c'((x^-, x^+)) = c(x) \quad \text{per ogni } x \in V \setminus \{s, t\}$$

e non assegnando alcuna capacità (ovvero, assegnando loro capacità infinita) agli altri lati. Ora, osserviamo che se $S \subseteq V \setminus \{s, t\}$ è un insieme di vertici che separa s da t in R allora $C_S = \{(x^-, x^+) | x \in S\}$ è una sezione di R' . Siccome gli archi di R' diversi da quelli che provengono da vertici di R hanno capacità infinita, è chiaro che le sezioni di capacità minima di R' saranno del tipo C_S appena descritto, con S un insieme di vertici di R che separa s da t . A questo punto, una applicazione del Teorema Mincut–Maxflow completa la dimostrazione. ■

Esercizio 5.6. Siano f e g due flussi per la rete R . Si dica se è vero che l'applicazione $f \wedge g$ definita ponendo, per ogni arco e di R , $(f \wedge g)(e) = \min\{f(e), g(e)\}$, è un flusso per R .

Esercizio 5.7. Si faccia un esempio di una rete in cui le sezioni di minima capacità non sono quelle composte dal minimo numero di archi.

Esercizio 5.8. Trovare un flusso con valore massimo nella rete di Figura 5.3.

Esercizio 5.9. Sia E un sottoinsieme di archi della rete R , tale che togliendo da R un qualsiasi arco di E si ottiene una rete in cui ogni flusso ha valore nullo. Provare che E contiene una sezione di R .

Esercizio 5.10. Sia f un flusso per la rete R . Provare che se $U(S_f)$ è una sezione di R , allora f è un flusso di valore massimo.

5.3 Applicazioni: grado di connessione e Teorema di Menger.

In questa sezione tratteremo un importante concetto in teoria dei grafi (quello del grado di connessione di un grafo) e dimostreremo il fondamentale teorema di Menger. Si tratta di un risultato classico, che proveremo utilizzando la tecnica introdotta nella sezione precedente.

Procederemo per gradi, iniziando con il provare in modo diretto un primo caso del Teorema di Menger, e quindi generalizzando ed estendendo i concetti introdotti fino a provare, utilizzando l'idea di flusso, la forma generale del Teorema.

L'obiettivo generale che ci proponiamo in primo luogo è quello di cercare di graduare in qualche modo il concetto di "connessione" di un grafo. Oltre a semplicemente suddividere i grafi tra quelli connessi e quelli non connessi, vogliamo tradurre in maniera efficace l'idea che, tra i grafi

connessi, ce ne siano alcuni "più connessi" di altri, e possibilmente di quantificare un tale "grado di connessione". Ad esempio, consideriamo i seguenti grafi su 5 vertici: un cammino semplice P_5 , il grafo T_2 costituito da due triangoli con un solo vertice in comune, il ciclo C_5 ed il grafo completo K_5 .

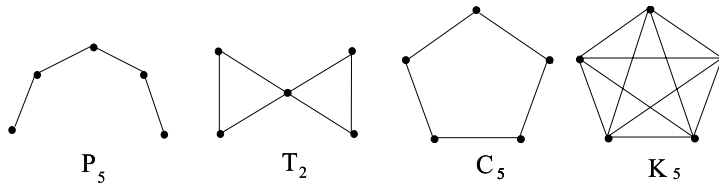


Figura 5.5

Ora, ci sembra abbastanza naturale dire che questi grafi siano stati disegnati (da sinistra a destra) in un ordine crescente di connettività; ovvero che, ad esempio, il grafo completo K_5 sia un grafo "altamente connesso", che il ciclo C_5 sia abbastanza connesso ma non quanto K_5 , e che P_5 sia connesso in un grado ancora inferiore.

Possiamo cercare di precisare questa idea ancor vaga in due direzioni. Nella prima possiamo valutare come "grado di connessione" di un grafo la misura di "quanto" è necessario togliere da esso in modo che il grafo che rimane non sia connesso. Limitandoci per il momento a considerare soltanto la soppressione di vertici (e dei lati ad essi adiacenti), osserviamo così che qualsiasi vertice non estremo si tolga a P_5 il grafo che rimane non è connesso; similmente, non è connesso il grafo che si ottiene togliendo al grafo T_2 il vertice centrale. Invece, qualsiasi vertice togliamo al ciclo C_5 il grafo residuo (un cammino P_4) è connesso; per rendere sconnesso C_5 è necessario togliere *almeno due* vertici. Potremmo quindi dire che i grafi P_5 e T_2 sono 1-connessi, mentre il grafo C_5 è 2-connesso. Dal grafo completo K_5 possiamo togliere qualsiasi insieme di vertici (sino a 4), senza che il grafo che rimane sia sconnesso.

Nell'altra direzione si parte dalla considerazione che un grafo è connesso se ogni coppia di vertici è collegata da almeno un cammino semplice. Potremmo dunque ritenere che un grafo sia dotato di un grado di connessione tanto maggiore quanto più sono i cammini diversi che è possibile trovare tra qualsiasi coppia di vertici. Per formalizzare in modo chiaro questa idea occorre innanzi tutto intenderci su cosa significa che due cammini sono diversi.

Due cammini semplici in un grafo si dicono **indipendenti** se non hanno alcun vertice in comune, a parte eventualmente gli estremi.

Nel grafo P_5 ogni coppia di vertici distinti è congiunta da un unico cammino. Nel grafo T_2 coppie di vertici distinti sono congiunte da più cammini semplici (due per la precisione), tuttavia se si prendono i vertici nei due diversi triangoli, si vede che non è possibile trovare due cammini *indipendenti* che li congiungono. Invece nel ciclo C_5 ogni coppia di vertici distinti è congiunta da due cammini semplici indipendenti. Infine, nel grafo completo K_5 ogni coppia di vertici distinti è congiunta da una moltitudine di cammini semplici (quanti per la precisione?), tra i quali ce ne sono sempre almeno 4 tra loro indipendenti.

Il Teorema di Menger afferma, in sostanza, che questi due approcci sono equivalenti.

Sia Γ un grafo connesso e sia S un sottoinsieme di vertici di Γ ; diciamo che S **separa** Γ se $\Gamma - S$ non è connesso (in inglese si dice che S è un *cut-set* per Γ). Se $1 \leq k \in \mathbb{N}$, diciamo che il grafo Γ è **k -connesso** se ha almeno $k + 1$ vertici e Γ non è separato da alcun sottoinsieme di $k - 1$ vertici.

Dunque, un grafo Γ è 1-connesso se e solo se è connesso nel senso usuale del termine; ed è 2-connesso se e solo se ha almeno 3 vertici e $\Gamma - u$ è connesso per ogni vertice u . I

grafi P_5 e T_2 della figura 5.5 sono 1-connessi ma non 2-connessi, il ciclo C_5 è 2-connesso (ma non 3-connesso), ed il grafo K_5 è 4-connesso.

Il **grado di connessione** $\kappa(\Gamma)$ di un grafo Γ è il massimo k per cui Γ è k -connesso. In altri termini, $\kappa(\Gamma) = k$ se e solo se Γ ha almeno $k + 1$ vertici e k è la cardinalità minima di un sottoinsieme di vertici che separa Γ (se Γ non è connesso si scrive $\kappa(\Gamma) = 0$). Ad esempio, $\kappa(\Gamma) = 1$ se e solo se Γ è connesso ed ha uno snodo, $\kappa(C_n) = 2$ per ogni ciclo C_n , e $\kappa(K_n) = n - 1$ per ogni grafo completo K_n . Il grado di connessione del grafo di Petersen è 3 (lo si dimostri).

Prima di provare il risultato fondamentale (il Teorema di Menger, appunto), discutiamo più in dettaglio il caso dei grafi 2-connessi. Si tratta di un caso di per sé interessante e, pur se quello che proveremo discenderà poi come caso particolare dal Teorema di Menger, ci consentirà di familiarizzarci con questo importante aspetto della teoria dei grafi. Inoltre, per questo caso più accessibile forniremo delle dimostrazioni dirette, cosa che forse farà apprezzare l'efficacia del metodo indiretto (che utilizza il teorema Maxflow–Mincut) che invece adotteremo per provare il Teorema di Menger.

Sia Γ un grafo connesso. Un vertice v di Γ si dice uno **snodo** (in inglese: *cut-vertex*) se il grafo $\Gamma - v$ è sconnesso. Dunque un grafo è 2-connesso se è connesso, ha almeno 3 vertici ed è privo di snodi.

Proposizione 5.7. *Sia Γ un grafo connesso con almeno 3 vertici. Sono equivalenti:*

- (i) *per ogni coppia di vertici distinti u e v di Γ esistono almeno due cammini semplici indipendenti da u a v ;*
- (ii) *Γ è 2-connesso;*
- (iii) *ogni coppia di vertici distinti di Γ appartiene ad un ciclo;*
- (iv) *ogni coppia di lati distinti di Γ appartiene ad un ciclo.*

DIMOSTRAZIONE. (i) \Rightarrow (ii). Supponiamo che Γ soddisfi (i), e sia u un vertice di Γ . Siano x e y sono due vertici distinti di $\Gamma - u$; allora esistono in Γ due cammini indipendenti da x in y , almeno uno dei quali non passa per u . Dunque $\Gamma - u$ è connesso. Ciò vale per ogni vertice u , e pertanto Γ è 2-connesso.

(ii) \Rightarrow (iii). Supponiamo che Γ sia 2-connesso, e siano x e y due vertici distinti. Proviamo che x ed y appartengono ad uno stesso ciclo di Γ procedendo per induzione sulla loro distanza d . Se $d = 1$ allora $e = \{x, y\}$ è un lato di Γ . Poiché Γ è 2-connesso, $\Gamma - e$ è connesso; dunque esiste un cammino semplice da x a y che non contiene e , e che assieme ad e forma un ciclo a cui appartengono x e y .

Sia $d \geq 2$, e sia $e = \{x, z\}$ il primo lato di un cammino semplice da x a y . Poiché $\Gamma - z$ è connesso, esiste un cammino semplice \mathcal{P} da x a y che non passa per z ; inoltre, siccome la distanza di z da y è $d - 1$, per ipotesi induttiva esiste un ciclo \mathcal{C} di Γ a cui appartengono z e y . Ora, percorrendo \mathcal{P} da x sino al primo suo vertice in comune con \mathcal{C} (vertice che può eventualmente essere x o y), quindi percorrendo \mathcal{C} fino a y e poi indietro a z , ed infine percorrendo il lato $\{z, x\}$ si ha un ciclo di Γ a cui appartengono x e y .

(iii) \Rightarrow (i). Questo implicazione è chiara.

(iii) \Leftrightarrow (iv). Esercizio. ■

Com'è possibile costruire grafi 2-connessi? Supponiamo di avere dato un grafo 2-connesso Γ_0 , e di aver fissato due suoi vertici distinti x e y . Se estendiamo Γ_0 mediante l'aggiunta di nuovi vertici e lati in modo che i componenti aggiunti costituiscano un cammino semplice da x a y , otteniamo un grafo Γ che è ancora 2-connesso (vedi figura 5.6; si noti anche che non è strettamente necessario

DIMOSTRAZIONE. In un verso l'affermazione è quasi banale: se per ogni coppia di vertici distinti di Γ esistono k cammini indipendenti allora Γ è k -connesso. Viceversa, supponiamo che Γ sia k -connesso e siano s, t vertici distinti. Se s e t non sono adiacenti allora l'esistenza di k cammini indipendenti da s a t discende subito dal Teorema di Menger. Se invece $e = \{s, t\}$ è un lato di Γ , allora certamente $\Gamma - e$ è $k - 1$ -connesso e ancora il teorema di Menger assicura l'esistenza di $k - 1$ cammini indipendenti tra s e t in $\Gamma - e$. Assieme al cammino $s e t$ essi costituiscono una famiglia di k cammini indipendenti da s a t in Γ . ■

La nozione di k -connessione che abbiamo sin qui discusso è stata definita (in ciascuno dei due modi equivalenti) facendo riferimento principalmente ai *vertici* del grafo: sia nella definizione di insieme separatore, sia in quella di indipendenza di due cammini. Possiamo procedere similmente, facendo però riferimento ai *lati*, ed ottenendo una diversa nozione di connettività. Ed ancora potremo partire da due punti di vista (separazione e cammini) che un'altra versione del Teorema di Menger proverà essere equivalenti.

Sia $\Gamma = (V, E)$ un grafo; diciamo che un insieme C di lati **e.separa** Γ (dove "e." sta per *edge*) se $\Gamma - C$ non è connesso. Ciò significa che esistono due vertici distinti x e y di Γ tali che ogni cammino semplice da x a y utilizza almeno un lato appartenente a C (si tratta di quello che per grafi diretti abbiamo chiamato una *sezione*). Se $C = \{e\}$ è costituito da un solo lato ed e.separa Γ , si dice allora che il lato e è un **ponte** (in inglese: *bridge*) di Γ . Osserviamo, ad esempio, che la Proposizione 1.7 implica che grafo connesso è un albero se e soltanto se ogni suo lato è un ponte.

Se $1 \leq k \in \mathbb{N}$, diciamo che il grafo Γ è **k -e.connesso** se ha almeno 2 vertici e Γ non è separato da alcun insieme costituito da $k - 1$ lati o meno.

Dunque, un grafo Γ è 1-e.connesso se e solo se è connesso; ed è 2-e.connesso se e solo se ha almeno 2 vertici, è connesso e nessun suo lato è un ponte. È facile vedere che se e è un ponte in un grafo connesso Γ , allora ciascun estremo di e è uno snodo di Γ (lo si dimostri per esercizio). La figura 2.6, o il grafo T_2 della figura 5.5, mostrano invece degli esempi di grafi con uno snodo (il vertice centrale in figura) ma privi di ponti; si tratta cioè di grafi 2-e.connessi, ma non 2-connessi. I cammini semplici come P_5 non sono 2-e.connessi, mentre tali sono i cicli come C_5 (che però non sono 3-e.connessi); il grafo K_5 è 4-connesso.

L'**indice di e.connessione** $\lambda(\Gamma)$ di un grafo Γ è il massimo k per cui Γ è k -e.connesso. Ad esempio, $\lambda(\Gamma) = 1$ se e solo se Γ è connesso ed ha un ponte, $\lambda(C_n) = 2$ per ogni ciclo C_n , e $\lambda(K_n) = n - 1$ per ogni grafo completo K_n . L'indice di e.connessione del grafo di Petersen è 3.

Vediamo ora la cosa dal punto di vista dei cammini: diciamo che due cammini in un grafo Γ sono **e.disgiunti** se non hanno alcun lato in comune (dunque cammini indipendenti sono e.disgiunti, ma non vale il viceversa). Vedremo che la k -e.connessione equivale all'esistenza, per ogni coppia di vertici non adiacenti del grafo, di k cammini a due a due e.disgiunti tra i due vertici. Prima però di provare questo in generale, il lettore può cercare di dimostrarlo nel caso della 2-e.connessione mediante un risultato che sia analogo alla Proposizione 5.7.

Fatto questo, veniamo al Teorema di Menger nella versione per lati.

Teorema 5.10. *Siano s e t vertici non adiacenti di un grafo. Allora il massimo numero di cammini semplici e.disgiunti da s a t è uguale alla cardinalità minima di un insieme di lati che separa s da t .*

DIMOSTRAZIONE. Siano s e t vertici non adiacenti del grafo Γ . È chiaro che il minimo numero di lati che separano s da t deve essere almeno pari al massimo numero di cammini semplici e.disgiunti da s a t . Viceversa, si considera il grafo diretto associato a Γ come nella dimostrazione del Teorema 5.8, e questa volta si assegna una capacità 1 ad ogni arco. Si ottiene così una rete

alla quale si applica il Teorema 5.5. Poiché ogni arco ha la stessa capacità, la capacità minima k di una sezione è il minimo numero di archi da cui essa può essere costituita (che, in Γ , è a cardinalità minima di un insieme di lati che separa s da t). Poiché il flusso che realizza il valore massimo k è intero, esso assume valore 0 o 1; considerando l'insieme degli archi su cui tale flusso non è nullo si trovano certamente k cammini semplici e disgiunti tra s e t . ■

Anche in questo caso si ha come conseguenza la forma globale.

Teorema 5.11. *Sia $k \geq 2$, e Γ un grafo con almeno 2 vertici. Allora Γ è k -e.connesso se e solo se per ogni coppia s, t di vertici distinti di Γ esistono k cammini semplici e disgiunti da s a t .*

DIMOSTRAZIONE. Esercizio. ■

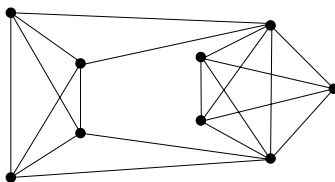


Figura 5.7; un grafo 3-e.connesso ma non 3-connesso.

Esercizio 5.11. Si $\delta(\Gamma)$ il minimo tra i gradi dei vertici di un grafo connesso Γ . Si provi che $\kappa(\Gamma) \leq \lambda(\Gamma) \leq \delta(\Gamma)$. Si trovino esempi di grafi per cui la differenza $\delta(\Gamma) - \kappa(\Gamma)$ è arbitrariamente grande.

Esercizio 5.12. Si provi l'equivalenza (iii) \Leftrightarrow (iv) nell'enunciato della Proposizione 5.7.

Esercizio 5.13. Si dia una dimostrazione del Teorema di Hall 3.4 utilizzando il Teorema di Menger. [sugg.: ad un grafo bipartito si aggiungano opportunamente due vertici...]

Esercizio 5.14. Sia $2 \leq k$ e sia Γ un grafo k -connesso. Si provi per ogni sottoinsieme di k vertici distinti di Γ esiste un ciclo che li contiene tutti.

Esercizio 5.15. (*Lemma del ventaglio*). Siano $k \geq 1$, Γ un grafo k -connesso e u un vertice di Γ . Siano y_1, y_2, \dots, y_k vertici distinti (e tutti diversi da u) di Γ . Si provi che esistono k cammini semplici P_1, \dots, P_k in Γ tali che P_i congiunge u a y_i e, per ogni $i \neq j$, P_i e P_j hanno in comune il solo vertice u . [sugg.: aggiungere a Γ un vertice adiacente ai vertici y_1, \dots, y_k , e quindi applicare il Teorema di Menger]

5.4 Fattori. Stabilità.

Un *fattore* di un grafo Γ è un sottografo il cui insieme dei vertici coincide con quello del grafo Γ . Uno *spanning-tree* di un grafo Γ è, ad esempio, un fattore di Γ . Se un fattore è un grafo regolare di valenza k , allora si dice che è un *k -fattore*.

1-fattori. Un interesse primario riveste l'esistenza in un grafo di 1-fattori; poiché l'idea di 1-fattore è l'estensione ad un grafo arbitrario di quella di accoppiamento completo

in un grafo bipartito. Infatti, siccome un grafo ha ogni vertice di grado 1 se e solo se ogni sua componente connessa è costituita da due vertici e dal lato che li congiunge, un 1-fattore di un grafo Γ non è che un insieme di lati di Γ a due a due indipendenti e tali che i loro estremi coprono tutti i vertici di Γ (vedi figura 5.8 A, oppure la figura 4.4, che mostra un 1-fattore del grafo K_{10}).

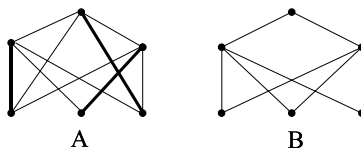


Figura 5.8: 1-fattori.

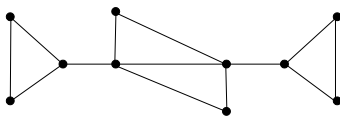
Chiaramente, un grafo che ammette un 1-fattore deve avere un numero pari di vertici, ma questa condizione è ben lontana dall'essere sufficiente (vedi figura 5.8 B).

Supponiamo che il grafo $\Gamma = (V, E)$ ammetta un 1-fattore U , e sia $S \subseteq V$. Osserviamo che se Δ è una componente connessa di $\Gamma - S$ e Δ ha un numero dispari di vertici, allora ci deve essere almeno un vertice di Δ che è estremo di un lato di U il cui altro estremo appartiene ad S (non può appartenere a $\Gamma - S$ dato che Δ è una componente connessa di questo). Inoltre ciascun elemento di S è associato in questo modo ad al più una componente connessa di $\Gamma - S$ con un numero dispari di vertici. Ne segue che *il numero di componenti connesse di $\Gamma - S$ con un numero dispari di vertici è al più $|S|$* . Ciò vale per ogni sottoinsieme S di vertici di Γ , e così inteso costituisce dunque una condizione necessaria a che Γ ammetta un 1-fattore. Che tale condizione sia anche sufficiente è il contenuto di un importante risultato di W. Tutte, del quale omettiamo la dimostrazione. Se $\Gamma = (V, E)$ è un grafo e $S \subseteq V$, denotiamo con $q(\Gamma - S)$ il numero di componenti connesse di $\Gamma - S$ con un numero dispari di vertici.

Teorema 5.12. (Tutte 1947) *Un grafo Γ ammette un 1-fattore se e soltanto se, per ogni $S \subseteq V$,*

$$q(\Gamma - S) \leq |S|.$$

2-fattori. Un grafo connesso ha tutti i vertici di grado 2 se e soltanto se è un ciclo. Quindi, un 2-fattore di un grafo Γ è un fattore costituito da cicli a due a due privi di vertici in comune. In particolare, dunque, un grafo hamiltoniano ammette un 2-fattore (il grafo di Petersen ammette un 2-fattore ma non è hamiltoniano). Si osservi che l'ammettere un 2-fattore non è una proprietà più forte di quella di ammettere un 1-fattore: ogni ciclo di lunghezza dispari ammette un 2-fattore (se stesso) ma non un 1-fattore; la figura che segue è un altro esempio con un numero pari di vertici.



Teorema 5.13. (Petersen 1891) *Sia k un numero pari. Ogni grafo regolare k -valente ammette un 2-fattore.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\Gamma = (V, E)$ un grafo regolare di grado pari, che chiaramente possiamo assumere connesso. Allora, per il teorema 2.1, Γ ha un circuito euleriano $\mathcal{U} : v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \dots e_m v_m = v_0$. Costruiamo un grafo bipartito Γ' prendendo come insieme dei vertici $V^+ \cup V^-$, intendendo che ogni vertice $v \in V$ di Γ è "sdoppiato" in due vertici distinti v^+ e v^- , e come lati quelli del tipo $\{v_i^+, v_{i+1}^-\}$, ricavati dalla sequenza fornita dal circuito \mathcal{U} . osserviamo che, poiché \mathcal{U} è euleriano, c'è una corrispondenza biunivoca tra i lati di Γ e quelli di Γ' ; inoltre Γ' è regolare di grado $k/2$. Un facile corollario del Teorema di Hall 3.4 (vedi esercizio 3.9), assicura che il grafo Γ' ammette un accoppiamento completo (cioè un 1-fattore). I lati di tale accoppiamento (o meglio i loro corrispondenti in Γ) costituiscono quelli di un 2-fattore di Γ . ■

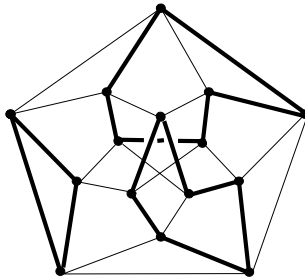


Figura 5.9: un 2-fattore

Indice di stabilità. Un sottoinsieme S dell'insieme dei vertici di un grafo Γ si dice *stabile* se nessuna coppia di elementi di S è adiacente in Γ . L'*indice di stabilità* di un grafo Γ è la massima cardinalità di un suo sottoinsieme stabile di vertici; lo denoteremo con $\alpha(\Gamma)$ (quindi, $\alpha(\Gamma)$ è il massimo intero n tale che il grafo complementare $\overline{\Gamma}$ contiene un sottografo completo K_n).

Teorema 5.14. (Chvátal e Erdős) *Sia $k \geq 2$, e Γ un grafo k -connesso. Se $\alpha(\Gamma) \leq k$ allora Γ è hamiltoniano.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\mathcal{C} : x_0 e_1 x_2 e_2 \dots x_{n-1} e_n x_n$ (con $x_0 = x_n$) un ciclo di Γ con il massimo numero di lati, e poniamo $X = \{x_0, \dots, x_{n-1}\}$. Supponiamo, per assurdo, che \mathcal{C} non sia un ciclo hamiltoniano. Allora $\Gamma - X$ ha una componente connessa non banale Δ ; sia y un vertice di Δ . Denotiamo con S l'insieme dei vertici di \mathcal{C} che sono adiacenti a qualche vertice di Δ . Osserviamo che $S \neq X$; infatti se fosse $S = X$, allora \mathcal{C} non sarebbe un ciclo di lunghezza massima (dire perché). Se $x \in X \setminus S$ allora, poiché δ è una componente connessa di $\Gamma - X$, ogni cammino da y a x deve passare per qualche elemento di S . Dunque S è un insieme di vertici che separa Γ , e pertanto $|S| \geq k$.

Poniamo ora $S^+ = \{x_{i+1} \mid x_i \in S\}$ ($i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$). Siano $x_{i+1}, x_{j+1} \in S^+$ e supponiamo che, per $i < j$, $e = \{x_{i+1}, x_{j+1}\}$ sia un lato di Γ ; allora e non è un lato di \mathcal{C} . Inoltre, poiché $x_i, x_j \in S$, esistono vertici u, v di Δ tali che $\{u, x_i\}$ e $\{v, x_j\}$ sono lati

di Γ e, siccome Δ è connesso, esiste un cammino semplice \mathcal{D} tra u e v tutto contenuto in Δ . Ma allora considerando $\{v, x_{j+1}\}$ seguito dal tratto di \mathcal{C} (all'indietro) tra x_j e x_{i+1} , poi dal lato e , quindi dal tratto di \mathcal{C} percorso da x_{j+1} a x_i , infine da $\{x_i, u\}$ e da \mathcal{D} , si otterrebbe un ciclo in Γ strettamente più lungo di \mathcal{C} (si veda l'argomento nella dimostrazione del Teorema di Ore refOre), il che contraddice la scelta di quest'ultimo. Dunque S^+ è un insieme stabile di vertici di Γ . Ne segue che $S^+ \cup \{y\}$ è stabile: infatti, sempre per la massimalità di \mathcal{C} , nessun elemento di S^+ appartiene ad S , in particolare nessun elemento di S^+ è adiacente a y . Pertanto

$$\alpha(\Gamma) \geq |S^+ \cup \{y\}| > |S^+| = |S| \geq k$$

che è contro le ipotesi. ■

Esercizio 5.16. Si trovi un grafo cubico connesso privo di 1-fattori.

Esercizio 5.17. Sia Γ un grafo connesso che ammette un 2-fattore costituito da due cicli disgiunti. Si provi che Γ ha un 1-fattore se e solo se ha un numero pari di vertici.

Esercizio 5.18. Sia Γ un grafo cubico. Provare che se Γ ha un circuito hamiltoniano, allora il sottografo che si ottiene togliendo da Γ i lati di un tale circuito è un 1-fattore di Γ . Viceversa sia M un 1-fattore di Γ ; provare che ogni componente connessa del grafo ottenuto togliendo da Γ i lati di M è un ciclo. Concludere che un grafo cubico connesso è hamiltoniano se e soltanto se ammette un 1-fattore tale che il suo residuo è connesso.

Esercizio 5.19. Sia S un insieme di vertici del grafo $\Gamma = (V, E)$. Si provi che S è stabile se e soltanto se $V \setminus S$ è una copertura di Γ come definita nella sezione 3.2.

Esercizio 5.20. Sia Γ un grafo con n vertici ed m lati. Si provi che $\alpha(\Gamma)^2 \leq n^2 - 2m$.

ULTERIORI ESERCIZI

Esercizio 5.21. Si determini il grado di connessione e l'indice di e.connessione dei grafi delle figure

Esercizio 5.22. Sia Γ un grafo con n vertici e sia $2 \leq k \leq n - 1$. Si provi che se Γ ha k vertici di grado $n - 1$ allora Γ è k -connesso.

Esercizio 5.23. Si dia un esempio di un grafo 3-e.connesso ma non 2-connesso.

Esercizio 5.24. Usando il *line graph* (esercizio 1.35) si dimostri il Teorema 5.10 a partire dal Teorema 5.8 (il viceversa non è facile).

Esercizio 5.25. Sia Γ un grafo k -connesso, e siano S, T sottoinsiemi disgiunti di vertici di Γ tali che $|S| \leq |T| \leq k$. Si provi che esistono $|T|$ cammini a due a due indipendenti di Γ tali che i loro estremi sono uno in S e l'altro in T . [sugg.: usare il lemma del ventaglio]

Esercizio 5.26. Sia Γ un grafo. Un sottografo (indotto) massimale per essere 2-connesso si dice un *blocco* di Γ .

- (i) Dire perché nella definizione la parola "indotto" è messa tra parentesi.
- (ii) Si provi che due blocchi distinti hanno al più un vertice in comune.

Esercizio 5.27. Siano B_1 e B_2 due blocchi distinti del grafo Γ . Si provi che esiste al più un lato di Γ i cui estremi appartengono uno a B_1 ed uno a B_2 ; si dimostri che se un tale lato esiste allora è un ponte di Γ .

Esercizio 5.28. Sia Γ un grafo. Definiamo il grafo dei blocchi $B(\Gamma)$, prendendo come vertici i blocchi distinti di Γ , e congiungendo due di essi con un lato se e solo se hanno un vertice in comune oppure esiste un lato di Γ con un estremo in ciascuno di essi. Si provi che $B(\Gamma)$ è un grafo semplice, e che se Γ è connesso allora $B(\Gamma)$ è un albero.

Esercizio 5.29. Sia $k \geq 2$, e sia Γ un grafo k -connesso con $2k$ vertici. Si provi che Γ ha un ciclo hamiltoniano.

Esercizio 5.30. Si provi che un grafo cubico connesso è 2-connesso se e solo se è privo di ponti.

Esercizio 5.31. Sia Γ un grafo cubico 3-connesso. Si provi che ogni vertice di Γ appartiene al più ad un triangolo.

Esercizio 5.32. Si utilizzi il Teorema di Tutte 5.12 per dimostrare il seguente (e anteriore) risultato di Petersen: un grafo cubico privo di ponti ammette un 1-fattore.

Esercizio 5.33. Si trovi un grafo euleriano privo di 2-fattori.

